11. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Für eine auf $\mathbb{R}$ periodische Funktion f mit $f(\omega+1) = f(\omega)\ \forall\ \omega \in \mathbb{R}$, die zudem auf $([0,1], \mathfrak{B} \cap [0,1], \lambda)$ integrierbar ist, berechne man

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(3^i\,\omega\right).$$

Lösung: $T(\omega) := (3\,\omega) \bmod 1$ ist bekanntlich mischend und daher auch ergodisch. Aus $f(\omega+1) = f(\omega)$ folgt

$$f\left(3^i\,\omega\right) = f(3^i\,\omega - \lfloor 3^i\,\omega \rfloor) = f((3^i\,\omega) \bmod 1) = f\left(T^i(\omega)\right).$$

Aus dem Ergodensatz folgt daher

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(3^i\,\omega\right) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(T^i(\omega)\right) = \int_0^1 f\,d\lambda.$$

2. Man zeige, dass für jede ergodische Transformation T auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gilt

$$\mathbb{E}X = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X \circ T^i = \infty\ P\text{–fs.} \tag{1}$$

Beweis: Aus $\mathbb{E}X = \infty$ folgt $\mathbb{E}X^- < \infty$, sodass aus dem Ergodensatz folgt $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X^- \circ T^i = \mathbb{E}X^- < \infty$ P–fs. Es genügt daher X^+ zu betrachten.

Mit $X_N := X^+ \wedge N$ gilt wegen $X_N \le X^+$

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X^+ \circ T^i \ge \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_N \circ T^i = \mathbb{E}X_N \quad \forall\ N \in \mathbb{N}.$$

Da aus $X_N \nearrow X^+$ nach dem Satz von Levi folgt $\lim_N \mathbb{E}X_N = \mathbb{E}X^+ = \infty$, ist damit (1) gezeigt.

3. Man zeige mit Hilfe des Ergodensatzes, dass die relative Häufigkeit einer jeden Ziffer $0, \ldots, r-1$ in einem beliebigen r-adischen Zahlensystem $(r \ge 2)$ für jedes $\omega \in [0,1)$ λ–fü gegen r^{-1} konvergiert.

Beweis: $T(\omega) := (r\,\omega) \bmod 1$ ist bekanntlich mischend und daher ergodisch. Für $\omega = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i}{r^i},\ \omega_i \in \{0,\ldots,r-1\}$ gilt $T^i(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_{i+1}}{r^i}$. Daher ist $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{r},\frac{k+1}{r}\right)}\left(T^i(\omega)\right),\ k \in \{0,\ldots,r-1\}$ die relative Häufigkeit der Ziffer k in ω, und aus dem Ergodensatz folgt $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{r},\frac{k+1}{r}\right)} \circ T^i \to \mathbb{E}\mathbb{1}_{\left[\frac{k}{r},\frac{k+1}{r}\right)} = \frac{1}{r}$.

4. Man zeige, dass eine maßtreue Transformation T auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ genau dann ergodisch ist, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P\left(T^{-i}(A)\cap B\right) = P(A)\,P(B) \quad \forall\, A,B \in \mathfrak{A}, \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{A}$ eine Algebra ist, die $\mathfrak{S}$ erzeugt.

Beweis: Ist T ergodisch, so folgt aus dem Ergodensatz für $A, B \in \mathfrak{A}$

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = \mathbb{E}\mathbb{1}_A = P(A) \;\Rightarrow\; \lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i\, \mathbb{1}_B = P(A)\,\mathbb{1}_B\ P\text{–fs.}$$

Da die $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i\, \mathbb{1}_B$ gleichmäßig integrierbar sind, folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P\left(T^{-i}(A)\cap B\right) = \mathbb{E}\,P(A)\,\mathbb{1}_B = P(A)\,P(B) \quad \forall\, A,B \in \mathfrak{A}.$$

Wir zeigen nun, dass (2) die Ergodizität von T impliziert:
Ist $\varepsilon > 0,\ A \in \mathfrak{I}$, dann gibt es ein $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$, sodass $P(A \triangle A) < \varepsilon$. Damit gilt auch $P\left(T^{-i}(A)\triangle T^{-i}(A_\varepsilon)\right) < \varepsilon\ \forall\, i$. Zudem gibt es gemäß (2) ein n_ε, sodass mit der Bezeichnung $S_n(A) := \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} P\left(T^{-i}(A)\cap A\right)$ gilt $\left|S_n(A_\varepsilon) - P(A_\varepsilon)^2\right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon$. Das und $S_n(A) = P(A)\ (A \in \mathfrak{I})$ ergibt

$$\begin{aligned}\left|P(A) - P(A)^2\right| &\leq |S_n(A) - S_n(A_\varepsilon)| + \left|S_n(A_\varepsilon) - P(A_\varepsilon)^2\right| \\ &\quad + \left|P(A_\varepsilon)^2 - P(A_\varepsilon)\,P(A)\right| + \left|P(A_\varepsilon)\,P(A) - P(A)^2\right| \\ &\leq |S_n(A) - S_n(A_\varepsilon)| + \varepsilon + P(A_\varepsilon)\,P(A\triangle A_\varepsilon) + P(A)\,P(A\triangle A_\varepsilon).\end{aligned} \tag{3}$$

Für $|S_n(A) - S_n(A_\varepsilon)|$ gilt

$$\begin{aligned}
|S_n(A) - S_n(A_\varepsilon)| &\le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P\left(\left(T^{-i}(A) \cap A\right) \triangle \left(T^{-i}(A_\varepsilon) \cap A_\varepsilon\right)\right) \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P\left(\left(T^{-i}(A) \triangle T^{-i}(A_\varepsilon)\right) \cup (A \triangle A_\varepsilon)\right) \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P\left(T^{-i}(A) \triangle T^{-i}(A_\varepsilon)\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P(A \triangle A_\varepsilon) \le 2\,\varepsilon .
\end{aligned}$$

Eingesetz in (3) ergibt das $\left|P(A) - P(A)^2\right| \le 4\,\varepsilon \;\Rightarrow\; P(A) = 0 \vee P(A) = 1$.

5. Ist $\mathfrak{A}$ eine Algebra mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A})$, so sind die Punkte 5a. - 5c. äquivalent:

   (a) T ist ergodisch.

   (b) $P - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = P(A) \quad \forall\, A \in \mathfrak{A}$,

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = P(A) \quad P$–fs $\quad \forall\, A \in \mathfrak{A}$.

   Beweis:

   5a. $\Rightarrow$ **5b.** Aus dem Ergodensatz folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = \mathbb{E}\mathbb{1}_A = P(A)$ P–fs. Daher gilt auch $P - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = P(A)$.

   5b. $\Rightarrow$ **5c.** Aus dem Ergodensatz folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathfrak{J})$. P–fs. Daher gilt auch $P - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathfrak{J})$. P–fs. Da nach Punkt 5b. gilt $P - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = P(A)$ folgt daraus $P(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathfrak{J})$. Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = P(A)$.

   5c. $\Rightarrow$ **5a.** Ist $B \in \mathfrak{A}$, so folgt aus 5c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i\, \mathbb{1}_B = P(A)\,\mathbb{1}_B$. P–fs. Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} P\left(T^{-i}(A) \cap B\right) = P(A)\,P(B) \quad \forall\, A, B \in \mathfrak{A}$. Das impliziert nach Beispiel 4 die Ergodizität von T.

6. Man beweise, dass 2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen P, Q auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{S})$ entweder übereinstimmen oder singulär zueinander sind, wenn es eine Transformation $T : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\Omega, \mathfrak{S})$ gibt, die bezüglich beider Verteilungen maßtreu und ergodisch ist.

   Beweis: Ist $P \neq Q$, so existiert ein $A \in \mathfrak{S}$, sodass $P(A) \neq Q(A)$. Aus dem Ergodensatz von Birkhoff folgt, dass es ein $N \in \mathfrak{S}$ mit $P(N) = 0$ gibt, sodass für alle $\omega \in N^c$ gilt $\lim\limits_n \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i(\omega) = P(A) \neq Q(A)$. Daraus folgt $N^c \subseteq \{\omega : \lim\limits_n \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i(\omega) \neq Q(A)\} \Rightarrow Q(N^c) = 0$, da auch gilt $\lim\limits_n \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i(\omega) = Q(A)$ Q–fs, d.h. $P \neq Q \Rightarrow P \perp Q$.

7. Ist $(\Omega, \mathfrak{S})$ ein Messraum und $T : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\Omega, \mathfrak{S})$, so zeige man, dass die Menge $\mathcal{P}$ der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\Omega, \mathfrak{S})$, für die T maßtreu ist, konvex ist. Weiters beweise man, dass T für $P \in \mathcal{P}$ genau dann ergodisch ist, wenn P ein extremer Punkt von $\mathcal{P}$ ist, d.h. es gibt keine Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P_0 \neq P_1 \in \mathcal{P}$ und $\alpha \in (0, 1)$, sodass $P = \alpha P_0 + (1 - \alpha) P_1$.

   Beweis: Aus $P_0(T^{-1}(A)) = P_0(A)$ und $P_1(T^{-1}(A)) = P_1(A)$ folgt natürlich $\alpha P_0(T^{-1}(A)) + (1-\alpha) P_1(T^{-1}(A)) = \alpha P_0((A) + (1-\alpha) P_1(A) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$. Somit ist $\mathcal{P}$ konvex.
   Ist T bezüglich P nicht ergodisch, so gibt es ein $A \in \mathfrak{I}$ mit $0 < \alpha := P(A) < 1$. Die Verteilungen $P_A(B) := \frac{P(A \cap B)}{\alpha}$ und $P_{A^c}(B) := \frac{P(A^c \cap B)}{1-\alpha}$ liegen in $\mathcal{P}$, denn $P_A(T^{-1}(B)) = \frac{P(A \cap T^{-1}(B))}{\alpha} = \frac{P(T^{-1}(A) \cap T^{-1}(B))}{\alpha} = \frac{P(A \cap B)}{\alpha} = P_A(B)$, analog gilt $P_{A^c}(T^{-1}(B)) = P_{A^c}(B)$, und klarerweise gilt $P = \alpha P_A + (1 - \alpha) P_{A^c}$.

   Ist T umgekehrt ergodisch bezüglich P und gilt $P = \alpha P_0 + (1 - \alpha) P_1$ für $0 < \alpha < 1$, so ist T auch ergodisch bezüglich P_0 und P_1, denn aus $P(A) = 0$ folgt $P_0(A) = 0 \wedge P_1(A) = 0$, und aus $P(A) = 1$ folgt $P_0(A) = P_1(A) = 1$. Aus $A \in \mathfrak{I}$ folgt also $P_0(A), P_1(A) \in \{0, 1\}$. Daher gibt es zu jedem $B \in \mathfrak{S}$ Mengen N, N_0 mit $P(N) = P_0(N_0) = 0$, sowie $\lim\limits_n \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_B \circ T^i(\omega) = P(B)$ für alle $\omega \in N^c$ und $\lim\limits_n \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_B \circ T^i(\omega) = P_0(B) \quad \forall\, \omega \in N_0^c$. Aus $P(B) \neq P_0(B)$ müsste daher folgen $N_0^c \subseteq N \Rightarrow P(N_0^c) = 0 \Rightarrow P_0(N_0^c) = 0$. Dies widerspricht $P_0(N_0^c) = 1$. Analog gilt $P_1(B) = P(B) \quad \forall\, B \in \mathfrak{S} \Rightarrow P_0 = P_1$.