12. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Man zeige, dass für eine Folge (X_n) nichtnegativer, unabhängig identisch verteilter Zufallsvariabler mit $\mathbb{E}X_n = 1$ und $P(X_n = 1) < 1$ gilt

   (a) $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)\right)$ ist ein Martingal,

   (b) Für $Y_n := \prod_{i=1}^{n} X_i$ existiert $Y = \lim_n Y_n$ P-fs und es gilt $\mathbb{E}Y \leq 1$,

   (c) $\lim_n \frac{1}{n} \ln Y_n = c < 0 \quad P$–fs,

   (d) $Y = 0$ P-fs.

   Hinweis: Ist $P(Y > \varepsilon) > 0$ für $\varepsilon > 0$ mit Punkt (c) verträglich?

2. Aus einer Urne, die zunächst eine schwarze und eine weiße Kugel enthält wird immer wieder eine Kugel zufällig gezogen und durch 2 Kugeln der gleichen Farbe ersetzt. Sei X_n die Anzahl schwarzer Kugeln in der Urne vor der n-ten Ziehung und $Y_n := \frac{X_n}{n+1}$ ihr relativer Anteil (d.h. $X_1 = 1$,$Y_1 = \frac{1}{2}$). Man beweise nun,

   (a) dass gilt $P(X_n = k) = \frac{1}{n}, \quad 1 \leq k \leq n$,

   (b) dass $(\, Y_n \,, \mathfrak{S}(Y_1, \ldots, Y_n)\,)$ ein Doob-Martingal ist,

   (c) dass für $Y := \lim_n Y_n$ gilt $Y \sim U_{0,1}$.

3. Ein Spieler beginnt mit einem Startkapital $S_0 := 1$ zu spielen. Ist S_{n-1} sein Kapital nach $n-1$ Runden, so kann er in der n-ten Runde einen Anteil $0 \leq B_n \leq 1$ seines bisherigen Kapitals einsetzen, wobei er unabhängig von den bisher gespielten Runden mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0.5, 1)$ einen Gewinn in doppelter Höhe seines Einsatzes erhält und mit Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ leer ausgeht (der Einsatz verbleibt in beiden Fällen beim Spielbetreiber). Bezeichnet X_n den Ausgang des Glücksspiels der n-ten Runde ($X_n = 1$ bedeutet, dass der Spieler gewinnt, und $X_n = -1$, dass er verliert), so nimmt man an, dass der Spieler seinen Einsatz B_n nur auf Grund der bisherigen Ausgänge $X_1, \ldots, X_{n-1}$ festsetzen kann, dass die B_n also vorhersagbar sind bezüglich der Filtration $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)$. Man zeige, dass, dann $\left(Y_n := \log \frac{S_n}{S_0} - n \,(\log 2 - H(p, 1-p)\,)\,, \mathfrak{S}_n \right)$ ein Supermartingal ist und deshalb gilt $\mathbb{E} \log \frac{S_n}{S_0} \leq n \,(\log 2 - H(p, 1-p))$. Kann man die B_n so wählen, dass das obige Supermartingal zum Martingal wird? Welche Strategie sollte der Spieler verfolgen?

4. Man zeige, dass für ein Martingal $(X_n\,,\mathfrak{A}_n)$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}\,|X_n|<\infty$ gilt:

   (a) $\exists\, Y_n := \lim\limits_k \mathbb{E}(X_k^+|\mathfrak{A}_n)$ P–fs $\quad\forall\, n$, und $(Y_n\,,\mathfrak{A}_n)$ ist ein Martingal.

   (b) (X_n) ist darstellbar als Differenz 2-er nichtnegativer Martingale.

5. Man beweise mit Hilfe von Ergebnissen der Martingaltheorie Kolmogoroffs 0-1-Gesetz, dass die σ-Algebra der terminalen Ereignisse trivial ist, wenn die Zufallsvariablen X_n unabhängig sind.
   Hinweis: Man betrachte $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathfrak{S}(X_1,\ldots,X_n)$.

6. Sind die $Z_i \sim B_{\frac{1}{2}}$ unabhängig, so kann man $X_i := 2^{i-1}\,(2\,Z_i-1)$ als Nettogewinn des i-ten Spiels interpretieren, wenn man bei diesem Spiel € 2^{i-1} einsetzt, also in jedem Schritt seinen Einsatz verdoppelt.

   (a) Zeigen Sie $\left(S_n := \sum\limits_{i=0}^{n} X_i,\ \mathfrak{S}(X_1,\ldots,X_n)\right)$ ist ein Martingal.

   (b) Beweisen Sie $T := \min\{i:\ X_i>0\}$ ist eine endliche Stoppzeit.

   (c) Man berechne S_T und $\mathbb{E}S_T$.

   (d) Man interpretiere $S_{T\wedge n}$ und berechne $S_{T\wedge n}$ sowie $\mathbb{E}S_{T\wedge n}$.

   (e) Man berechne $\liminf\limits_n \int_{[T>n]}|S_n|\ dP$, $\mathbb{E}\,|S_n|$ und $\sup\limits_n \mathbb{E}\,|S_n|$.

7. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge mit $X_n := 2\,Y_n - 1,\ Y_n \sim B_{\frac{1}{2}}$, $X_0 := 0,\ S_n := \sum\limits_{i=0}^{n} X_i$, so zeige man, dass $\tau_{a,b} := \inf\{n:\ S_n \notin (-a,b)\}$ für $a,b\in\mathbb{N}$ eine endliche Stoppzeit zur Filtration $\mathfrak{A}_n := \mathfrak{S}(X_1,\ldots,X_n)$ bildet. Weiters berechne man $\mathbb{E}S_{\tau_{a,b}}$ und $P(S_{\tau_{a,b}}=a)$.
   Hinweis: Schätzen Sie $P(\tau_{a,b} > k\,(b+a))$ von oben mit Hilfe von $[X_1=\cdots=X_{a+b}=1]\subseteq[\tau_{a,b}\le b+a]$ ab. Überlegen Sie zudem, welche Werte $S_{\tau_{a,b}\wedge n}$ annehmen kann.