12. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Man zeige, dass für eine Folge (X_n) nichtnegativer, unabhängig identisch verteilter Zufallsvariabler mit $\mathbb{E}X_n = 1$ und $P(X_n = 1) < 1$ gilt

   (a) $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)\right)$ ist ein Martingal,

   (b) Für $Y_n := \prod_{i=1}^{n} X_i$ existiert $Y = \lim_n Y_n$ P-fs und es gilt $\mathbb{E}Y \leq 1$,

   (c) $\lim_n \frac{1}{n} \ln Y_n = c < 0 \quad P$–fs,

   (d) $Y = 0$ P-fs.

   Hinweis: $P(Y > \varepsilon) > 0$ für $\varepsilon > 0$ steht im Widerspruch zu Punkt c.

   (a) $Y_n := \prod_{i=1}^{n} X_i$ ist bezüglich $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)$ messbar, und da gilt $\mathfrak{S}_n \subseteq \mathfrak{S}_{n+1}$, bilden die $\mathfrak{S}_n$ eine Filtration. Weiters gilt

   $$\mathbb{E}\left(Y_{n+1}|\mathfrak{S}_n\right) = Y_n\, \mathbb{E}\left(X_{n+1}|\mathfrak{S}_n\right) = Y_n\, \mathbb{E}X_{n+1} = Y_n\,.$$

   (b) $Y = \lim_n Y_n$ P-fs folgt aus dem Konvergenzsatz von Doob, und das Lemma von Fatou ergibt $\mathbb{E}Y \leq \liminf_n \mathbb{E}Y_n = 1$.

   (c) Aus $\ln X_1 \leq X_1 - 1$ folgt $(\ln X_1)^+ \leq (X_1 - 1)^+$. Daher gilt $\mathbb{E}(\ln X_1)^+ \leq \mathbb{E}X_1 < \infty$. $\Rightarrow \quad \exists\, \mathbb{E}\, \ln X_1$. Aus $X_1 - 1 - \ln X_1 \geq 0$ folgt $0 \leq \mathbb{E}(X_1 - 1 - \ln X_1) = \mathbb{E}X_1 - 1 - \mathbb{E}\ln X_1 = -\mathbb{E}\, \ln X_1$. Aus $\mathbb{E}\ln X_1 = 0$ müsste folgen $X_1 - 1 - \ln X_1 = 0$ P–fs. Das gilt nur für $X_1 = 1$ P–fs. Wegen $P(X_n = 1) < 1$ gilt somit $E\ln X_1 = c < 0$, und aus dem GGZ folgt schließlich

   $$\lim_n \frac{1}{n}\, \ln Y_n = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i = E\ln X_1 = c < 0 \ P\text{–fs.}$$

   (d) Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $M > -\infty$, sodass auf $A := [Y > \varepsilon]$ gilt $\ln Y \geq M$. Da der Logarithmus auf A stetig ist, folgt aus $Y_n \to Y$ auch $\lim_n \ln Y_n = \ln Y$. Damit aber gilt für alle $\omega \in A$ $\lim_n \frac{1}{n} \ln Y_n(\omega) = \lim_n \frac{1}{n} \ln Y(\omega) \geq \lim_n \frac{M}{n} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; P(A) = 0$, da nach Punkt (c) gilt $P(\lim_n \frac{1}{n} \ln Y_n < 0) = 1$. Somit gilt $Y = 0$ P–fs.

2. Aus einer Urne, die zunächst eine schwarze und eine weiße Kugel enthält wird immer wieder eine Kugel zufällig gezogen und durch 2 Kugeln der gleichen Farbe ersetzt. Sei X_n die Anzahl schwarzer Kugeln in der Urne vor der n-ten Ziehung und $Y_n := \frac{X_n}{n+1}$ ihr relativer Anteil (d.h. $X_1 = 1\,, Y_1 = \frac{1}{2}$). Man beweise nun,

   (a) dass gilt $P(X_n = k) = \frac{1}{n}\,, \quad 1 \leq k \leq n\,,$

   (b) dass $(\,Y_n\,, \mathfrak{S}(Y_1, \ldots, Y_n)\,)$ ein Doob-Martingal ist,

   (c) dass für $Y := \lim\limits_n Y_n$ gilt $Y \sim U_{0,1}\,.$

   (a) vollständige Induktion $n = 1: \;\; P(X_1 = 1) = 1\,.$
   $n \to n+1: \quad$ Sei $k = 1:$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P(X_n = 1)\, P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\,. \end{aligned}$$

   Sei $k = n+1:$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = n+1) &= P(X_n = n)\, P(X_{n+1} = n+1 | X_n = n) \\ &= \frac{1}{n}\,\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,. \end{aligned}$$

   Sei $1 < k < n+1$

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = k) = P(X_n = k-1)\, P(X_{n+1} = k | X_n = k-1) \\ & \quad + P(X_n = k)\, P(X_{n+1} = k | X_n = k) \\ & \quad = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) + \frac{1}{n}\,\frac{k-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,. \end{aligned}$$

   (b) Die $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(Y_1, \ldots, Y_n) = \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)$ bilden eine Filtration, und es gilt $\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathfrak{S}_n\,) = \mathbb{E}(Y_{n+1} | X_n, \ldots, X_1) = \mathbb{E}(Y_{n+1} | X_n)\,,$ wobei $\mathbb{E}(Y_{n+1} | X_n = x) = \frac{x+1}{n+1}\,\frac{x}{n} + \frac{x}{n+1}\left(1 - \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} = y_n\,.$ Also gilt $\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathfrak{S}_n) = Y_n$. Wegen $|Y_n| \leq 1 \quad \forall\; n \in \mathbb{N}$ sind die Y_n gleichmäßig integrierbar und bilden daher ein Doob-Martingal $Y_n = \mathbb{E}(Y | \mathfrak{S}_n)$ mit $Y = \lim\limits_n Y_n \quad P$–fs.

   (c) Mit $F_n(y) := P(Y_n \leq y)$ und $F(y) := P(Y \leq y)$ folgt aus (a)

$$\begin{aligned} & F_n\left(\frac{k}{n+1}\right) = P\left(\frac{X_n}{n+1} \leq \frac{k}{n+1}\right) = \frac{k}{n} \\ & \quad \Rightarrow \; F_n(y) = \frac{\lfloor y\,(n+1) \rfloor}{n} \quad \text{und} \quad \lim_n F_n(y) = y \quad \forall\; y \in (0,1)\,. \end{aligned}$$

Da einerseits gilt $[Y_n \le y - \varepsilon] \setminus [|Y_n - Y| > \varepsilon] \subseteq [Y \le y]$, andererseits $[Y \le y] \subseteq [Y_n \le y + \varepsilon] \cup [|Y_n - Y| > \varepsilon]$ und $\lim\limits_n P(|Y_n - Y| > \varepsilon) = 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$, folgt nun

$$y - \varepsilon = \lim_n F_n(y - \varepsilon) \le F(y) \le \lim_n F_n(y + \varepsilon) = y + \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0\,.$$

Also gilt $P(Y \le y) = F(y) = y$, d.h. $Y \sim U_{0,1}$.

3. Ein Spieler beginnt mit einem Startkapital $S_0 := 1$ zu spielen. Ist S_{n-1} sein Kapital nach $n-1$ Runden, so kann er in der n-ten Runde einen Anteil $0 \le B_n \le 1$ seines bisherigen Kapitals einsetzen, wobei er unabhängig von den bisher gespielten Runden mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0.5, 1)$ einen Gewinn in doppelter Höhe seines Einsatzes erhält und mit Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ leer ausgeht (der Einsatz verbleibt in beiden Fällen beim Spielbetreiber). Bezeichnet X_n den Ausgang des Glücksspiels der n-ten Runde ($X_n = 1$ bedeutet, dass der Spieler gewinnt, und $X_n = -1$, dass er verliert), so nimmt man an, dass der Spieler seinen Einsatz B_n nur auf Grund der bisherigen Ausgänge $X_1, \ldots, X_{n-1}$ festsetzen kann, dass die B_n also vorhersagbar sind bezüglich der Filtration $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)$. Man zeige, dass, dann $\left(Y_n := \log \frac{S_n}{S_0} - n\,(\log 2 - H(p, 1-p)\,)\,, \mathfrak{S}_n \right)$ ein Supermartingal ist und deshalb gilt $\mathbb{E} \log \frac{S_n}{S_0} \le n\,(\log 2 - H(p, 1-p))$. Kann man die B_n so wählen, dass das obige Supermartingal zum Martingal wird? Welche Strategie sollte der Spieler verfolgen?

   Wegen $\log \frac{S_n}{S_0} = \log \frac{S_n\, S_{n-1}}{S_{n-1}\, S_0} = \log \frac{S_n}{S_{n-1}} + \log \frac{S_{n-1}}{S_0}$ gilt offensichtlich $Y_n := \log \frac{S_n}{S_{n-1}} + H(p,q) - \log 2 + Y_{n-1} = \log\left(\frac{1 + B_n\, X_n}{2}\right) + H(p,q) + Y_{n-1}$. Daraus folgt, dass für alle $\vec{x}_1^{\,n-1} := (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \{-1, 1\}^{n-1}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(Y_n | \vec{X}_1^{n-1} = \vec{x}_1^{\,n-1}\right) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\log \frac{1 + B_n\, X_n}{2} \,\middle|\, \vec{X}_1^{n-1} = \vec{x}_1^{\,n-1}\right) + H(p,q) + Y_{n-1}(\vec{x}_1^{\,n-1}) \\
&\quad = p\, \log \frac{1 + B_n(\vec{x}_1^{\,n-1})}{2} + q\, \log \frac{1 - B_n(\vec{x}_1^{\,n-1})}{2} + H(p,q) + Y_{n-1}(\vec{x}_1^{\,n-1}) \\
&\quad = p\, \log \frac{\frac{1 + B_n(\vec{x}_1^{\,n-1})}{2}}{p} + q\, \log \frac{\frac{1 - B_n(\vec{x}_1^{\,n-1})}{2}}{q} + Y_{n-1}(\vec{x}_1^{\,n-1}) \\
&\quad = -D\left((p,q) \,\middle|\, \left(\frac{1 + B_n(\vec{x}_1^{\,n-1})}{2}, \frac{1 - B_n(\vec{x}_1^{\,n-1})}{2}\right)\right) + Y_{n-1}(\vec{x}_1^{\,n-1})\,.
\end{aligned}$$

   Daher ist Y_n ein Supermartingal bzw. genau dann ein Martingal, wenn die relative Entropie verschwindet, also gilt $B_n(\vec{x}_1^{\,n-1}) = 2\,p - 1$. Das ist auch die beste Strategie.

4. Man zeige, dass für ein Martingal $(X_n\,,\mathfrak{A}_n)$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}\,|X_n|<\infty$ gilt:

   (a) $\exists\, Y_n := \lim\limits_k \mathbb{E}(X_k^+|\mathfrak{A}_n)$ P–fs $\quad\forall\, n$, und $(Y_n\,,\mathfrak{A}_n)$ ist ein Martingal.

   (b) (X_n) ist darstellbar als Differenz 2-er nichtnegativer Martingale.

   Beweis: $(X_n^+,\mathfrak{A}_n)$ ist ein Submartingal Daher gilt für festes n und $k>n$

$$\mathbb{E}(X_{k+1}^+|\mathfrak{A}_n)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{k+1}^+|\mathfrak{A}_k)|\mathfrak{A}_n)\geq\mathbb{E}(X_k^+|\mathfrak{A}_n).$$

   Somit gilt $\mathbb{E}(X_k^+|\mathfrak{A}_n)\nearrow Y_n=\lim\limits_k\mathbb{E}(X_k^+|\mathfrak{A}_n)$. Y_n ist $\mathfrak{A}_n$-messbar, und aus dem Satz über die Konvergenz durch Monotonie folgt

$$\mathbb{E}Y_n=\lim_k\mathbb{E}\,\mathbb{E}(X_k^+|\mathfrak{A}_n)=\lim_k\mathbb{E}X_k^+\leq\sup_n\mathbb{E}\,|X_k|<\infty\;\Rightarrow\;Y_n\in\mathcal{L}_1.$$

   Konvergenz durch Monotonie für bedingte Erwartungen impliziert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathfrak{A}_n)&=\mathbb{E}(\lim_{k>n}\mathbb{E}(X_k^+|\mathfrak{A}_{n+1})|\mathfrak{A}_n)\\&=\lim_{k>n}\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_k^+|\mathfrak{A}_{n+1})|\mathfrak{A}_n)=\lim_{k>n}\mathbb{E}(X_k^+|\mathfrak{A}_n)=Y_n\quad P\text{–fs}.\end{aligned}$$

   Somit ist $(Y_n\,,\mathfrak{A}_n)$ ein Martingal.

   Wendet man das obige Ergebnis auf $(-X_n\,,\mathfrak{A}_n)$ an, so sieht man, dass auch $(Z_n\,,\mathfrak{A}_n)$ mit $Z_n:=\lim\limits_k\mathbb{E}(X_k^-|\mathfrak{A}_n)$ ein Martingal ist.

   Punkt **??**. folgt nun aus

$$\begin{aligned}Y_n-Z_n&=\lim_{k>n}\mathbb{E}(X_k^+|\mathfrak{A}_n)-\lim_{k>n}\mathbb{E}(X_k^-|\mathfrak{A}_n)\\&=\lim_{k>n}\big(\mathbb{E}(X_k^+|\mathfrak{A}_n)-\mathbb{E}(X_k^-|\mathfrak{A}_n)\big)=\lim_{k>n}\mathbb{E}(X_k|\mathfrak{A}_n)=\lim_{k>n}X_n=X_n.\end{aligned}$$

5. Man beweise mit Hilfe von Ergebnissen der Martingaltheorie Kolmogoroffs 0-1-Gesetz, dass die σ-Algebra der terminalen Ereignisse trivial ist, wenn die Zufallsvariablen X_n unabhängig sind.
   Hinweis: Man betrachte $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathfrak{S}(X_1,\ldots,X_n))$.

   Lösung: Die $\mathfrak{A}_n:=\mathfrak{S}(X_1,\ldots,X_n)$ bilden natürlich eine Filtration. $(\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathfrak{A}_n),\mathfrak{A}_n)$ mit $A\in\mathfrak{S}_\infty=\bigcap\limits_n\mathfrak{S}(X_i:\ i\geq n)$ ist ein Doob-Martingal, sodass mit $\mathfrak{A}_\infty:=\bigcup\limits_n\mathfrak{A}_n$ gilt $\lim\limits_n\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathfrak{A}_n)=\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathfrak{A}_\infty)=\mathbb{1}_A$.
   Da $\mathbb{1}_A$ unabhängig von $\mathfrak{A}_n$ ist, gilt $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathfrak{A}_n)=\mathbb{E}\mathbb{1}_A=P(A)\quad\forall\,n\in\mathbb{N}$. Daraus folgt $\mathbb{1}_A=\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathfrak{A}_\infty)=\lim\limits_n\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathfrak{A}_n)=P(A)$. Somit gilt $P(A)=0\vee P(A)=1$.

6. Sind die $Z_i\sim B_{\frac{1}{2}}$ unabhängig, so kann man $X_i:=2^{i-1}\,(2\,Z_i-1)$ als Nettogewinn des i-ten Spiels interpretieren, wenn man bei diesem Spiel € 2^{i-1} einsetzt, also in jedem Schritt seinen Einsatz verdoppelt.

(a) Zeigen Sie $\left(S_n := \sum_{i=0}^{n} X_i,\ \mathfrak{S}(X_1,\dots,X_n)\right)$ ist ein Martingal.

(b) Beweisen Sie $T := \min\{i:\ X_i > 0\}$ ist eine endliche Stoppzeit.

(c) Man berechne S_T und $\mathbb{E}S_T$.

(d) Man interpretiere $S_{T\wedge n}$ und berechne $S_{T\wedge n}$ sowie $\mathbb{E}S_{T\wedge n}$.

(e) Man berechne $\liminf_n \int_{[T>n]} |S_n|\ dP$, $\mathbb{E}\,|S_n|$ und $\sup_n \mathbb{E}\,|S_n|$.

Lösung: Mit $\mathfrak{A}_n := \mathfrak{S}(X_1,\dots,X_n)$ gilt

(a) $\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathfrak{A}_n) = \mathbb{E}(S_n|\mathfrak{A}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathfrak{A}_n) = S_n + \mathbb{E}X_{n+1} = S_n$.

(b) $[T>n] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i < 0] \in \mathfrak{A}_n\ \forall\ n \ \Rightarrow\ [T \le n] = [T>n]^c \in \mathfrak{A}_n$.
$T \sim G_{\frac{1}{2}} \ \Rightarrow\ P(T=\infty) = \lim_n P(T>n) = \lim_n \frac{1}{2^n} = 0.$

(c) $S_T = \sum_n S_n\, \mathbb{1}_{[T=n]} = \sum_n \left(2^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} 2^i\right) \mathbb{1}_{[T=n]} \equiv 1$. Daraus folgt $\mathbb{E}S_T = 1$.

(d) $S_{T\wedge n}$ ist der akkumulierte Gewinn (Verlust), wenn man spätestens zum Zeitpunkt n aufhört (aufhören muss).

$$S_{T\wedge n} = \begin{cases} 1\,, & T \le n \\ -\left(2^n - 1\right)\,, & T > n\,. \end{cases}$$

Da (S_n) ein Martingal ist, ist auch $S_{T\wedge n}$ ein Martingal. Daher gilt $\mathbb{E}S_{T\wedge n} = \mathbb{E}S_{T\wedge 0} = \mathbb{E}S_0 = 0$. Direkte Rechnung ergibt tatsächlich

$$\mathbb{E}S_{T\wedge n} = P(T\le n) - P(T>n)\,(2^n-1) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{2^n-1}{2^n} = 0$$

(e) $\liminf_n \int_{[T>n]} |S_n|\ dP = \liminf_n \frac{1}{2^n} \left| -\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} \right| = \lim_n \frac{2^n-1}{2^n} = 1$.
Wegen $|X_n| > |S_{n-1}|$ und da S_{n-1} und X_n unabhängig sind, gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|S_n| = \mathbb{E}\,|X_n + S_{n-1}| &= \int\limits_{[X_n>0]} X_n + S_{n-1} dP - \int\limits_{[X_n<0]} X_n + S_{n-1} dP \\ &= \int |X_n|\ dP + \int S_{n-1}\, dP \left(\int \mathbb{1}_{[X_n>0]}\, dP - \int \mathbb{1}_{[X_n<0]}\, dP \right) \\ &= \int |X_n|\ dP + \int S_{n-1}\, dP \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \int |X_n|\ dP = 2^{n-1}\,. \end{aligned}$$

Somit gilt $\sup_n \mathbb{E}\,|S_n| = \infty$.

7. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge mit $X_n := 2Y_n - 1,\ Y_n \sim B_{\frac{1}{2}}$, $X_0 := 0,\ S_n := \sum_{i=0}^{n} X_i$, so zeige man, dass $\tau_{a,b} := \inf\{n:\ S_n \notin (-a,b)\}$

für $a, b \in \mathbb{N}$ eine endliche Stoppzeit zur Filtration $\mathfrak{A}_n := \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)$ bildet. Weiters berechne man $\mathbb{E}S_{\tau_{a,b}}$ und $P(S_{\tau_{a,b}} = a)$.
Hinweis: Was können Sie aus $[X_1 = \cdots = X_{a+b} = 1] \subseteq [\tau_{a,b} \leq b + a]$ für $P(\tau_{a,b} > k\,(b + a))$ schließen? Zudem sehe man sich $(S_{\tau_{a,b} \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ genau an.

Lösung: Aus $P([\vec{X}_1^{a+b} = 1]) = 2^{-(a+b)} \leq P([\tau_{a,b} \leq b+a])$ folgt zunächst $P([\tau_{a,b} > b+a]) \leq \left(1 - 2^{-(a+b)}\right)$. Aus der Unabhängigkeit der X_n und wegen $[\tau_{a,b} > k\,(b + a)] \subseteq \bigcap\limits_{i=0}^{k-1} \left[\vec{X}_{i\,(a+b)+1}^{(i+1)\,(a+b)} = 1\right]$ impliziert das

$$P([\tau_{a,b} > k\,(b + a)]) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{(a+b)}}\right)^k \to 0 \;\Rightarrow\; P([\tau_{a,b} < \infty]) = 1.$$

Da $(S_n, \mathfrak{A}_n)$ ein Martingal ist, ist auch $(S_{\tau_{a,b} \wedge n}, \mathfrak{A}_n)$ ein Martingal, für das gilt $0 = \mathbb{E}S_0 = \mathbb{E}S_{\tau_{a,b} \wedge 0} = \mathbb{E}S_{\tau_{a,b} \wedge n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Da $\tau_{a,b}$ endlich ist, gilt $\lim\limits_n S_{\tau_{a,b} \wedge n} = S_{\tau_{a,b}}$ P–fs. Wegen $\left|S_{\tau_{a,b} \wedge n}\right| \leq a \vee b\;\forall\, n$ impliziert das

$$0 = \lim_n \mathbb{E}S_{\tau_{a,b} \wedge n} = \mathbb{E}S_{\tau_{a,b}} = b\,P(S_{\tau_{a,b}} = b) - a\,\left(1 - P(S_{\tau_{a,b}} = b)\right).$$

Daraus folgt $P(S_{\tau_{a,b}} = b) = \frac{a}{a+b} \quad \Rightarrow \quad P(S_{\tau_{a,b}} = a) = \frac{b}{a+b}$.