13. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Man beweise, dass aus $X_n \Rightarrow X$ folgt: $\mathbb{E}|X| \leq \liminf\limits_n \mathbb{E}|X_n|$.

2. Man zeige, dass für Zufallsvariable X_n mit $P(X_n \in \mathbb{Z}) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ die folgende Äquivalenz gilt

   $$X_n \Rightarrow X \Leftrightarrow (\, P(X \in \mathbb{Z}) = 1 \wedge \lim_n P(X_n = z) = P(X = z) \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}\,).$$

   Weiters zeige man, dass aus $\lim\limits_n P(X_n = z) = P(X = z) \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}$ i.A. nicht folgt $X_n \Rightarrow X$.

3. Man berechne die charakteristische Funktion von $U \sim U_{-1,1}$ und zeige, dass es keine unabhängig, identisch verteilten Zufallsvariablen X, Y mit $X - Y \sim U_{-1,1}$ gibt.

4. Man zeige, dass die Zufallsvariablen X_n mit den charakteristischen Funktionen $\varphi_n(t) := \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)|t|}$ keinen Erwartungswert besitzen, und dass die Stichprobenmittel $\overline{X}_N := \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} X_n$ stochastisch gegen eine Cauchyverteilung konvergieren, wenn die X_n unabhängig sind.

5. Man beweise mit charakteristischen Funktionen, dass für unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariable X_n mit endlicher Varianz σ^2 gilt

   $$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - \mathbb{E}X_k}{\sigma\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; N(0,1)\,.$$

6. Das Millionenrad der Brieflotterie besteht aus 80 Feldern. Auf 74 Feldern entfallen verschiedene Gewinnsummen x_i, die mitsamt der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens p_i in der folgenden Tabelle aufgelistet sind. Bleibt das Rad auf einem dieser Felder stehen, so erhält der Kandidat den entsprechenden Gewinn, und das Spiel ist beendet.

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1Mio.	500000	100000	50000	30000	20000	10000
p_i	$\frac{3}{80}$	$\frac{6}{80}$	$\frac{11}{80}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{15}{80}$	$\frac{10}{80}$

   Sechs Felder sind sogenannte Verdopplungsfelder. Stoppt das Rad auf einem dieser Felder, so darf der Kandidat solange weiterspielen, bis das Rad schließlich auf einem der 74 Gewinnfelder zum Stillstand kommt, und der Spieler erhält das 2^{n-1}-fache des Gewinns, wenn das Glücksrad erst im n-ten Durchgang, auf einem Gewinnfeld hält. Jede Woche dürfen 3 Kandidaten an diesem Spiel teilnehmen. Wieviel Kapital muss der Spielbetreiber pro Jahr für die Gewinnausschüttung vorsehen, wenn diese Summe mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha = 0.9$, nicht überschritten werden soll?

7. Unter $2N + 1$ Personen wird eine Abstimmung über ein Projekt durchgeführt. n Personen sind für das Projekt der Rest ist gleichgültig und entscheidet mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 für oder gegen das Projekt. Wie groß muss n sein damit die Befürworter mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 gewinnen. Berechnen Sie n konkret für N=500 000.