13. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Man beweise, dass aus $X_n \Rightarrow X$ folgt: $\mathbb{E}|X| \leq \liminf\limits_n \mathbb{E}|X_n|$.

   Lösung: Aus dem Satz von Skorochod folgt $\exists\, Y_n \sim X_n\,, Y \sim X$ und $Y_n \to Y$ P–fs $\Rightarrow$ $|Y_n| \to |Y|$ P–fs . Aus dem Lemma von Fatou folgt daher $\mathbb{E}\,|X| = \mathbb{E}|Y| = \mathbb{E}\underline{\lim}|Y_n| \leq \underline{\lim}\mathbb{E}|Y_n| = \underline{\lim}\mathbb{E}|X_n|$.

2. Man zeige, dass für Zufallsvariable X_n mit $P(X_n \in \mathbb{Z}) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ die folgende Äquivalenz gilt

   $$X_n \Rightarrow X \Leftrightarrow (\, P(X \in \mathbb{Z}) = 1 \wedge \lim_n P(X_n = z) = P(X = z) \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}\,).$$

   Weiters zeige man, dass aus $\lim\limits_n P(X_n = z) = P(X = z) \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}$ i.A. nicht folgt $X_n \Rightarrow X$.

   Beweis: $\Rightarrow$: *Lösung 1:* $\mathbb{Z}^c = \bigcup\limits_{z\in\mathbb{Z}} (z, z+1)$ ist offen. Sind nun $\widetilde{P}_n$ und $\widetilde{P}$ die durch X_n bzw. X induzierten Verteilungen und F_n sowie F die Verteilungsfunktionen, so folgt aus dem Portmanteau-Satz

   $$P(X \in Z^c) = \widetilde{P}(\mathbb{Z}^c) \leq \liminf \widetilde{P}_n(Z^c) = 0 \Rightarrow P(X \in \mathbb{Z}) = \widetilde{P}(\mathbb{Z}) = 1.$$

   Damit ist F auf jedem Intervall $(z, z+1)$ konstant, und aus der Rechtsstetigkeit von F folgt $F(z) = F(x) \quad \forall\, x \in (z, z+1)$. Dies impliziert nun mit $0 < \varepsilon < 1$

   $$P(X = z) = F(z+\varepsilon) - F(z-\varepsilon) = \lim_n (F_n(z+\varepsilon) - F_n(z-\varepsilon)\,) = \lim_n P(X_n = z).$$

   Lösung 2: Sind $F_n\,, F$ die zu X_n und X gehörigen Verteilungsfunktionen und ist C_F die Menge der Stetigkeitspunkte von F , so gibt es zu $x \in (z\,, z+1)\,, z \in \mathbb{Z} \quad u, v \in C_F$ mit $z < u < x < v < z+1$. Daher gilt $F_n(z) = F_n(u) \leq F_n(x) \leq F_n(v) = F_n(z) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

   $$\begin{aligned}\limsup_n F_n(z) &= \limsup_n F_n(u) = \lim_n F_n(u) = F(u) \leq F(x)\\ &\leq F(v) = \lim_n F_n(v) = \liminf_n F_n(v) = \liminf_n F_n(z)\,.\end{aligned}$$

   Somit gilt $F(x) = \lim\limits_n F_n(z) \quad \forall\, x \in (z\,, z+1)$. Wegen der Rechtsstetigkeit von F gilt auch $F(z) = \lim\limits_{x \searrow z} F(x) = \lim\limits_n F_n(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}$. Außerdem gilt $P(\, X \in (z\,, z+1)\,) = F_-(z+1) - F(z) = \lim\limits_n F_n(z) - \lim\limits_n F_n(z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$ und

   $$P(X = z) = F(z) - F(z-1) = \lim_n [\, F_n(z) - F_n(z-1)\,] = \lim_n P(X_n = z)\,.$$

$\Leftarrow$: $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, m\,, n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \; P(X < -m) \leq \frac{\varepsilon}{4} \;\wedge\; P(X > m) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ sowie $|P(X_n = z) - P(X = z)| < \frac{\varepsilon}{4\,m} \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon\,, \;\forall\; -m \leq z \leq m$. Daraus folgt $\sum\limits_{z=-m}^{m} P(X_n = z) \geq \sum\limits_{z=-m}^{m} P(X = z) - \frac{\varepsilon}{2} \geq 1 - \varepsilon \;\Rightarrow\; F_n(x) < \varepsilon \quad \forall\, x < -m \,\wedge\, F_n(x) > 1 - \varepsilon \quad \forall\, x > m$. Somit $|F_n(x) - F(x)| < 2\,\varepsilon \quad \forall\, x \in [-m, m]^c$.
Für $-m \leq z < x < z + 1 \leq m$ und $n \geq n_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= |F_n(z) - F(z)| \\ &\leq |F_n(-m) - F(-m)| + \sum_{k=-m}^{z} |P(X_n = k) - P(X = k)| \leq 3\,\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Ohne $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$ kann man im Allgemeinen aus $\lim\limits_n P(X_n = z) = P(X = z) \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}$ nicht auf $X_n \;\Rightarrow\; X$ schließen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Für $P(X_n = n) = 1$ und $P(X = 0.5) = 1$ gilt $F_n \;\Rightarrow\; 0 \neq F$, und zudem gilt $\lim\limits_n P(X_n = z) = P(X = z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}$.

3. Man berechne die charakteristische Funktion von $U \sim U_{-1,1}$ und zeige, dass es keine unabhängig, identisch verteilten Zufallsvariablen X, Y mit $X - Y \sim U_{-1,1}$ gibt.

   Lösung: $\varphi(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\,t\,x}}{2}\,dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\,t\,x} + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\,t\,x}}{2}\,dx = \int\limits_{0}^{1} \cos(t\,x)\,dx = \frac{\sin t}{t}$.

   $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_{-Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(t)\,\overline{\varphi_X(t)} \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

   Aber $\varphi_U\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) = \frac{2\,\sin\frac{3\,\pi}{2}}{3\,\pi} = -\frac{2}{3\,\pi} < 0$.

4. Man zeige, dass die Zufallsariablen X_n mit den charakteristischen Funktionen $\varphi_n(t) := \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)|t|}$ keinen Erwartungswert besitzen, und dass die Stichprobenmittel $\overline{X}_N := \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} X_n$ stochastisch gegen eine Cauchyverteilung konvergieren, wenn die X_n unabhängig sind.

   Beweis: Da die φ_n reellwetig sind, sind die X_n symmetrisch um 0. Daher gilt entweder $\mathbb{E}X_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ oder die Erwartungswerte existieren nicht.
   Aber aus $\mathbb{E}X_n = 0$ müsste folgen $\varphi_n'(0) = 0$. Das steht im Widerspruch zu $\partial_l \varphi_n(0) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \neq \partial_r \varphi_n(0) = -\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

$$\lim_N \varphi_{\overline{X}_N}(t) = \lim_N \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_N \mathrm{e}^{-|t|\left(1 + \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-|t|}\,.$$

   Daher folgt die Behauptung aus dem Stetigkeitssatz von Lévy.

5. Man beweise mit charakteristischen Funktionen, dass für unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariable X_n mit endlicher Varianz σ^2 gilt

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - \mathbb{E}X_k}{\sigma\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; N(0,1)\,.$$

Lösung: Für $Y_k := \frac{X_k - \mathbb{E}X_k}{\sigma}$ gilt $\mathbb{E}Y_k = 0\,, \mathbb{E}Y_k^2 = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\varphi(t) := \varphi_{Y_k}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ und wir erhalten

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{2\,n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \to \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2} + n\,o\left(\frac{t^2}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

Das ist die charakteristische Funktion von $N(0,1)$. Nach dem Stetigkeitssatz von Lévy ist die Behauptung damit bewiesen.

6. Das Millionenrad der Brieflotterie besteht aus 80 Feldern. Auf 74 Feldern entfallen verschiedene Gewinnsummen x_i, die mitsamt der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens p_i in der folgenden Tabelle aufgelistet sind. Bleibt das Rad auf einem dieser Felder stehen, so erhält der Kandidat den entsprechenden Gewinn, und das Spiel ist beendet.

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1Mio.	500000	100000	50000	30000	20000	10000
p_i	$\frac{3}{80}$	$\frac{6}{80}$	$\frac{11}{80}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{15}{80}$	$\frac{10}{80}$

Sechs Felder sind sogenannte Verdopplungsfelder. Stoppt das Rad auf einem dieser Felder, so darf der Kandidat solange weiterspielen, bis das Rad schließlich auf einem der 74 Gewinnfelder zum Stillstand kommt, und der Spieler erhält das 2^{n-1}-fache des Gewinns, wenn das Glücksrad erst im n-ten Durchgang, auf einem Gewinnfeld hält. Jede Woche dürfen 3 Kandidaten an diesem Spiel teilnehmen. Wieviel Kapital muss der Spielbetreiber pro Jahr für die Gewinnausschüttung vorsehen, wenn diese Summe mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha = 0.9$, nicht überschritten werden soll?

Lösung: $q := 1 - \sum\limits_{i=1}^{7} p_i = \frac{6}{80}$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Rad auf einem Verdopplungsfeld hält. G der Gewinn eines Kandidaten.
Mit $C := \sum\limits_{i=1}^{7} x_i p_i = 109625, \quad Q := \sum\limits_{i=1}^{7} x_i^2 p_i = 5.8438 \cdot 10^{10}$ und der Anzahl der Verdoppelungen t erhält man für $\mathbb{E}G$ und Var G

$$\mathbb{E}G = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{7} 2^t x_i p_i q^t = C \sum_{t=0}^{\infty} (2q)^t = C \frac{1}{1-2q} = \frac{80}{68} C = 12897$$

$$\mathbb{E}G^2 = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{7} 2^{2t} x_i^2 p_i q^t = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 p_i \sum_{t=0}^{\infty} (4q)^t = \frac{Q}{1-4q} = \frac{80\,Q}{56} = \frac{10\,Q}{7}.$$

Daraus folgt Var $G = \mathbb{E}G^2 - (\mathbb{E}G)^2 == \frac{10}{7}Q - \frac{400}{289}C^2 = 6.6849 \cdot 10^{10}$ und $\sigma_G = \sqrt{\text{Var } G} = 258553$.
Wenn pro Jahr 156 Kandidaten spielen, so ist die durchschnittliche Jahresgewinnsumme $J = 156 \cdot \mathbb{E}G = 20\,119\,414$, und auf Grund des Grenzverteilungssatzes gilt $P\left(\sum_{i=1}^{156} G_i \leq J + u_{1-\alpha}\,\sigma_G\,\sqrt{156}\right) = 1-\alpha$, wobei $u_{1-\alpha}$ das α-Fraktil der Standardnormalverteilung ist. Der Wert für die Gewinnobergrenze beträgt daher 24 258 000 ($u_{1-\alpha} = 1,2816$).

7. Unter $2N+1$ Personen wird eine Abstimmung über ein Projekt durchgeführt. n Personen sind für das Projekt der Rest ist gleichgültig und entscheidet mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 für oder gegen das Projekt. Wie groß muss n sein damit die Befürworter mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 gewinnen. Berechnen Sie n konkret für N=500 000.

Lösung: $X_i \sim B_{0.5}, \quad S := \sum_{i=1}^{2\,N+1-n} X_i \sim B_{2\,N+1-n,0.5}, Z := \frac{S-\frac{2\,N+1-n}{2}}{\frac{\sqrt{2\,N+1-n}}{2}}$

$$\begin{aligned} P(S \geq N+1-n) &= P\left(Z \geq \frac{N+1-n-\frac{2\,N+1-n}{2}}{\frac{\sqrt{2\,N+1-n}}{2}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{1-n}{\sqrt{2\,N+1-n}}\right) \approx 1-\Phi\left(\frac{1-n}{\sqrt{2\,N+1-n}}\right) = \gamma := 0.01. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\frac{1-n}{\sqrt{2\,N+1-n}} = u := \Phi^{-1}(1-\gamma)$. Quadrieren ergibt

$$n^2 - 2\,n + 1 = 2\,N\,u^2 + u^2 - u^2\,n \Rightarrow n^2 + (u^2-2)\,n + 1 - 2\,N\,u^2 - u^2 = 0.$$

Damit erhält man $n = -\frac{u^2-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(u^2-2)^2}{4} + 2\,N\,u^2 - u^2 - 1} \approx 2325.$