Zusatzblatt aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
Beispiele sind nicht verpflichtend

1. Man zeige, dass auf einem endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ für jede Menge $D \subseteq \Omega$ gilt $\mu^*(D) = \mu(\Omega) \quad \Leftrightarrow \mu(A) = 0 \quad \forall\ A \in \mathfrak{S},\ A \subseteq D^c$ (D heißt dann „dicke Menge“), und dass für dicke Mengen durch $\mu_D(A \cap D) := \mu(A)\ \forall\ A \in \mathfrak{S}$ auf $(D, \mathfrak{S} \cap D)$ ein wohldefiniertes Maß festgelegt wird.

2. Man beweise, dass es zu jedem $A \in \mathfrak{B}_k$ mit $0 < \lambda_k(A)$ ein $r > 0$ gibt, sodass gilt $K(\vec{0}, r) := \{\vec{x} :\ \|\vec{x}\| < r\} \subseteq A - A := \{\vec{x} - \vec{y} :\ \vec{x}, \vec{y} \in A\}$.
Hinweis: Nehmen Sie o.E.d.A. an, dass gilt A ist kompakt, $A \subseteq U$, U offen und $\lambda_k(U) < 2\,\lambda_k(A)$ (warum dürfen diese Annahmen getroffen werden?). Können A und $A + \vec{x}$ disjunkt sein, wenn gilt $A + \vec{x} \subseteq U$?

3. Ist $\alpha_x := (x\,\alpha) \mod 1 := x\,\alpha - \lfloor x\,\alpha \rfloor$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}^c \cap (0,1),\ x \in \mathbb{Z}$, und $a \oplus b := (a + b) \mod 1$ bzw. $a \ominus b := a \oplus (-b),\ a, b \in \mathbb{R}$, so zeige man:

   (a) $\alpha_x \oplus \alpha_y = \alpha_{x+y} \quad \forall\ x, y \in \mathbb{Z}$ (damit gilt auch $\alpha_x \ominus \alpha_y = \alpha_{x-y}$).

   (b) $x \neq y \quad \Rightarrow \quad \alpha_x \neq \alpha_y$; für $A := \{\alpha_x :\ x \in \mathbb{Z}\}$ gilt also $|A| = \infty$.

   (c) $B := \{\alpha_{2\,x} :\ x \in \mathbb{Z}\}$ und $C := \{\alpha_{2\,x+1} :\ x \in \mathbb{Z}\}$ sind dicht in $\Omega := [0,1)$.
   Hinweis: Wenn man $[0,1)$ in die Intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ zerlegt, müssen dann mindestens 2 Punkte $\alpha_{2\,x} < \alpha_{2\,y}$ in einem Intervall liegen? Was gilt für die Vielfachen der Differenz $d := \alpha_{2\,y} - \alpha_{2\,x}$?

   (d) $\omega \sim \omega' := \omega \ominus \omega' \in A$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\Omega := [0,1)$. Ist E eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Vertreter enthält, so gilt $\Omega = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{Z}} E \oplus \alpha_x$ und $E \oplus \alpha_x \cap E \oplus \alpha_y = \emptyset$ $\forall\ x \neq y$, wobei natürlich $E \oplus \alpha_x := \{e \oplus \alpha_x;\ e \in E\}$.

   (e) $F \in \mathfrak{B} \cap \Omega \wedge F \subseteq G := \bigcup\limits_{x \in \mathbb{Z}} E \oplus \alpha_{2\,x} \ \Rightarrow\ \lambda(F) = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^*(G^c) = 1$,
   $F \in \mathfrak{B} \cap \Omega \wedge F \subseteq G^c = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{Z}} E \oplus \alpha_{2x+1} \ \Rightarrow\ \lambda(F) = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^*(G) = 1$,
   d.h. G und G^c sind „ dicke Mengen “. des Raums $(\Omega, \mathfrak{B} \cap \Omega, \lambda)$.
   Hinweis: Verwenden Sie die Beispiele 1, 2 und Punkt 3c.

4. Ist $(\Omega, \mathfrak{A}) := ([0,1), \mathfrak{B} \cap [0,1))$ und $D \subseteq \Omega$ eine Menge, für die gilt $\lambda^*(D) = \lambda^*(D^c) = 1$, so beweise man

   (a) $\mathfrak{S} := \{A_1 \cup A_2 :\ A_1 \in \mathfrak{A} \cap D, A_2 \in \mathfrak{A} \cap D^c\} = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \{D\})$.

   (b) $P((D \cap B_1) \cup (D^c \cap B_2)) := \frac{\lambda(B_1)}{2} + \frac{\lambda(B_2)}{2},\ B_1, B_2 \in \mathfrak{A}$ ist eine wohldefinierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathfrak{S}$.

(c) Berechnen Sie $P(D)$, $P(B)$ und $P(D \cap B)$ für $B \in \mathfrak{A}$. Welche Beziehung besteht zwischen $\mathfrak{A}$ und $\{D\}$? Bestimmen Sie $P(D|\mathfrak{A})$.

(d) Ist $\widetilde{P}(.|\mathfrak{A})(.)$ eine reguläre durch $\mathfrak{A}$ bedingte Verteilung auf $\mathfrak{S}$, so gibt es eine P-Nullmenge N, auf deren Komplement N^c gilt $\widetilde{P}([p,q)|\mathfrak{A}) = \mathbb{1}_{[p,q)} \quad \forall\, p,q \in \Omega \cap \mathbb{Q}$. Daraus folgere man, dass für alle $\omega \in N^c$ gilt $\widetilde{P}(\{\omega\}|\mathfrak{A})(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega\}}(\omega) = 1$.

(e) Nun beweise man, dass gilt $P(D|\mathfrak{A})(\omega) \geq 1 \quad \forall\, \omega \in N^c \cap D$. Ist dies mit dem Ergebnis aus Punkt 4c. vereinbar ?