Zusatzblatt aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
Beispiele sind nicht verpflichtend

1. Man zeige, dass auf einem endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ für jede Menge $D \subseteq \Omega$ gilt $\mu^*(D) = \mu(\Omega) \quad \Leftrightarrow \mu(A) = 0 \quad \forall\ A \in \mathfrak{S},\ A \subseteq D^c$ (D heißt dann „dicke Menge"), und dass für dicke Mengen durch $\mu_D(A \cap D) := \mu(A)\ \forall\ A \in \mathfrak{S}$ auf $(D, \mathfrak{S} \cap D)$ ein wohldefiniertes Maß festgelegt wird.

   Beweis: Aus $\mu(\Omega) = \mu^*(D) = \inf\limits_{D \subseteq A \in \mathfrak{S}} \mu(A)$ und $D^c \supseteq A \in \mathfrak{S}$ folgt sofort $D \subseteq A^c \in \mathfrak{S} \Rightarrow \mu(A^c) = \mu(\Omega)$. Somit gilt $\mu(A) = 0 \quad \forall\ A \subseteq D^c$.
   Umgekehrt folgt aus $\mu(A) = 0 \quad \forall\ A \subseteq D^c, A \in \mathfrak{S}$ für jedes $B \in \mathfrak{S}, B \supseteq D$ natürlich $B^c \subseteq D^c \Rightarrow \mu(B^c) = 0 \Rightarrow \mu(B) = \mu(\Omega) \Rightarrow \mu^*(D) = \mu(\Omega)$.
   Aus $A \cap D = B \cap D,\ A, B \in \mathfrak{S}$ folgt $A \cap B^c \cap D = B \cap B^c \cap D = \emptyset \Rightarrow A \setminus B \subseteq D^c$. Somit gilt $\mu(A \setminus B) = 0 \ \Rightarrow\ \mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A \cap B)$. Analog gilt $\mu(B) = \mu(A \cap B)$. Daher ist μ_D wohldefiniert.
   Aus $\emptyset = (A \cap D) \cap (B \cap D) = A \cap B \cap D$ folgt $A \cap B \subseteq D^c \quad \Rightarrow \mu(A \cap B) = 0$. Somit gilt $\mu_D((A \cup B) \cap D) = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = \mu_D(A \cap D) + \mu_D(B \cap D)$, d.h. μ_D ist ein Inhalt. μ_D ist aber auch stetig von oben bei $\emptyset$, denn aus $A_n \cap D \searrow \emptyset$ folgt $D \cap \bigcap\limits_n A_n = \emptyset \ \Rightarrow\ \bigcap\limits_n A_n \subseteq D^c \ \Rightarrow\ 0 = \mu\left(\bigcap\limits_n A_n\right)$. Demnach gilt $\lim\limits_n \mu_D(A_n \cap D) = \lim\limits_n \mu(A_n) = 0$.
   Somit ist μ_D ein Maß.

2. Man beweise, dass es zu jedem $A \in \mathfrak{B}_k$ mit $0 < \lambda_k(A)$ ein $r > 0$ gibt, sodass gilt $K(\vec{0}, r) := \{\vec{x} :\ \|\vec{x}\| < r\} \subseteq A - A := \{\vec{x} - \vec{y} :\ \vec{x}, \vec{y} \in A\}$.
   Hinweis: Nehmen Sie o.E.d.A. an, dass gilt A ist kompakt, $A \subseteq U$, U offen und $\lambda_k(U) < 2\,\lambda_k(A)$ (warum dürfen diese Annahmen getroffen werden?). Können A und $A + \vec{x}$ disjunkt sein, wenn gilt $A + \vec{x} \subseteq U$?

   Beweis: Bekanntlich gilt $\lambda_k(A) = \sup\{\lambda_k(C) : C \subseteq A,\ C \text{ ist kompakt}\}$ und $\lambda_k(A) = \inf\{\lambda_k(U) : A \subseteq U,\ U \text{ ist offen}\}$. Daher können die obigen Annahmen getroffen werden. Gilt nun $A + \vec{x} \subseteq U$, so erhält man wegen der Translationsinvarianz von λ_k

   $$\begin{aligned} 2\,\lambda_k(A) > \lambda_k(U) &\geq \lambda_k(A \cup (A + \vec{x})) = \lambda_k(A) + \lambda_k(A + \vec{x}) - \lambda_k(A \cap (A + \vec{x})) \\ &= 2\,\lambda_k(A) - \lambda_k(A \cap (A + \vec{x})) \ \Rightarrow\ \lambda_k(A \cap (A + \vec{x})) > 0 \ \Rightarrow\ A \cap (A + \vec{x}) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

   Aber zu $\vec{y} \in A \cap (A + \vec{x})$ gibt es $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2 \in A$, sodass $\vec{y} = \vec{a}_1 \wedge \vec{y} = \vec{a}_2 + \vec{x}$.
   Daraus folgt $\vec{x} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \in A - A$.
   Weiters gilt $r := \inf\{\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\| :\ \vec{a} \in A,\ \vec{b} \in U^c\} > 0$, da A kompakt und U^c abgeschlossen ist. Für alle $\vec{x}$ mit $\|\vec{x}\| < r$ gilt aber $A + \vec{x} \in U \Rightarrow \vec{x} \in A - A$, d.h. $K(\vec{0}, r) \subseteq A - A$.

3. Ist $\alpha_x := (x\,\alpha) \mod 1 := x\,\alpha - \lfloor x\,\alpha \rfloor$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}^c \cap (0,1),\ x \in \mathbb{Z}$, und $a \oplus b := (a+b) \mod 1$ bzw. $a \ominus b := a \oplus (-b),\ a, b \in \mathbb{R}$, so zeige man:

   (a) $\alpha_x \oplus \alpha_y = \alpha_{x+y} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$ (damit gilt auch $\alpha_x \ominus \alpha_y = \alpha_{x-y}$).

   (b) $x \neq y \;\Rightarrow\; \alpha_x \neq \alpha_y$; für $A := \{\alpha_x :\ x \in \mathbb{Z}\}$ gilt also $|A| = \infty$.

   (c) $B := \{\alpha_{2\,x} :\ x \in \mathbb{Z}\}$ und $C := \{\alpha_{2\,x+1} :\ x \in \mathbb{Z}\}$ sind dicht in $\Omega := [0,1)$.
   Hinweis: Wenn man $[0,1)$ in die Intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ zerlegt, müssen dann mindestens 2 Punkte $\alpha_{2\,x} < \alpha_{2\,y}$ in einem Intervall liegen? Was kann man über die Vielfachen der Differenz $d := \alpha_{2\,y} - \alpha_{2\,x}$ sagen?

   (d) $\omega \sim \omega' := \omega \ominus \omega' \in A$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\Omega := [0,1)$. Ist E eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Vertreter enthält, so gilt $\Omega = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{Z}} E \oplus \alpha_x$ und $E \oplus \alpha_x \cap E \oplus \alpha_y = \emptyset \quad \forall\, x \neq y$, wobei natürlich $E \oplus \alpha_x := \{e \oplus \alpha_x;\ e \in E\}$.

   (e) $F \in \mathfrak{B} \cap \Omega \wedge F \subseteq G := \bigcup\limits_{x \in \mathbb{Z}} E \oplus \alpha_{2\,x} \;\Rightarrow\; \lambda(F) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^*(G^c) = 1$, $F \in \mathfrak{B} \cap \Omega \;\wedge\; F \subseteq H := G^c = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{Z}} E \oplus \alpha_{2\,x+1} \;\Rightarrow\; \lambda(F) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^*(G) = 1$, d.h. G und H sind „dicke Mengen“. des Raums $(\Omega, \mathfrak{B} \cap \Omega, \lambda)$.
   Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse aus Beispiel 2 und Punkt 3c.

Beweis:

(a) Aus $0 \leq \alpha_x \oplus \alpha_y = (x+y)\,\alpha - z < 1 \wedge 0 \leq \alpha_{x+y} = (x+y)\,\alpha - \lfloor (x+y)\,\alpha \rfloor < 1$ mit $z \in \mathbb{Z}$ folgt sofort $z = \lfloor (x+y)\,\alpha \rfloor \;\Rightarrow\; \alpha_x \oplus \alpha_y = \alpha_{x+y}$.

(b) $\alpha_x = \alpha_y \;\Rightarrow\; (x-y)\,\alpha = \lfloor x\,\alpha \rfloor - \lfloor y\,\alpha \rfloor \in \mathbb{Z}$. Da aus $x \neq y$ natürlich $\alpha \in \mathbb{Q}$ folgen müsste, gilt $x = y$. Klarerweise gilt dann $|A| = \infty$.

(c) Von den $n+1$ verschiedenen Punkten $\alpha_{2\,x},\ 0 \leq x \leq n$ müssen mindestens zwei, bspw. $\alpha_{2\,x} < \alpha_{2\,y}$ in einem Intervall liegen. Damit gilt offensichtlich $0 < d := \alpha_{2\,y} - \alpha_{2\,x} = \alpha_{2\,y} \ominus \alpha_{2\,x} = \alpha_{2\,z} < \frac{1}{n}$ mit $z := y - x$ und $d \in B$. Für die Punkte $d < 2\,d < \cdots < \lfloor \frac{1}{d} \rfloor\, d < 1$ gilt $i\,d - (i-1)\,d = d$ und $i\,d \in B$ für $2 \leq i \leq \lfloor \frac{1}{d} \rfloor$. Wegen $\lfloor \frac{1}{d} \rfloor\, d \leq 1 < \lfloor \frac{1}{d} \rfloor\, d + d$ gilt auch $1 - \lfloor \frac{1}{d} \rfloor\, d \leq d$.
Da B somit dicht ist, gibt es zu jedem $\omega \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$ einen Punkt $\alpha_{2\,x} \in ((\omega \ominus \alpha) - \delta, (\omega \ominus \alpha) + \delta)$ mit $\delta := \min\{\varepsilon, \omega, \omega \ominus \alpha, 1 - \omega, \alpha \ominus \omega)\}$. Damit gilt $\alpha_{2\,x+1} = \alpha_{2\,x} \oplus \alpha \in (\omega - \delta, \omega + \delta)$, d.h. auch C ist dicht in Ω.

(d) Wegen $\omega \ominus \omega = 0 \in A,\ \omega \ominus \omega' = \alpha_x \;\Rightarrow\; \omega' \ominus \omega = \alpha_{-x}$ und weil aus $\omega \ominus \omega' = \alpha_x \wedge \omega' \ominus \omega'' = \alpha_y$ folgt $\omega \ominus \omega'' = \alpha_{x+y}$, ist $\sim$ eine

Äquivalenzrelation.
$\omega \in \Omega \;\Rightarrow\; \exists\, e \in E;\; \omega \sim e \;\Rightarrow\; \exists\, x \in \mathbb{Z}:\; \omega = e \oplus \alpha_x \;\Rightarrow\; \Omega = \bigcup\limits_{x\in\mathbb{Z}} E \oplus \alpha_x$.
$\omega \in E \oplus \alpha_x \cap E \oplus \alpha_y \;\Rightarrow\; \exists\, e, f \in E:\; e \oplus \alpha_x = \omega = f \oplus \alpha_y \;\Rightarrow\; e \sim f$. Da E aus jeder Äquivalenzklasse nur ein Element enthält, folgt daraus $e = f$. Aber damit gilt $\alpha_x = \alpha_y \;\Rightarrow\; x = y$, d.h. $x \neq y \;\Rightarrow\; E \oplus \alpha_x \cap E \oplus \alpha_y = \emptyset$.

(e) Gilt $F \subseteq G$ und $\lambda(F) > 0$, so enthält $F - F$ nach Beispiel 2 ein Intervall $(-r, r) \neq \emptyset$. Da C dicht ist, gibt es ein $\alpha_{2\,z+1} \in (-r, r) \subseteq F - F \subseteq G - G$. Somit gibt es $e \oplus \alpha_{2\,x} \geq f \oplus \alpha_{2\,y} \in G$, sodass $\alpha_{2\,z+1} = e \oplus \alpha_{2\,x} - (f \oplus \alpha_{2\,y})$. Daraus folgt $\alpha_{2\,z+1} \oplus f \oplus \alpha_{2\,y} = e \oplus \alpha_{2\,x} \;\Rightarrow\; e \ominus f = \alpha_{2\,z+1} \oplus \alpha_{2\,(y-x)}$, d.h. $e \sim f \;\Rightarrow\; e = f \;\Rightarrow\; \alpha_{2\,(z+y-x)+1} = 0$. Aber es gilt $\alpha_{2\,w+1} \neq 0 \quad \forall\, w \in \mathbb{Z}$. Somit gilt $\lambda(F) = 0 \quad \forall\, F \subseteq G$, was nach Bsp. 1 $\lambda^*(H) = 1$ impliziert.
Aus $F \subseteq H = G \oplus \alpha$ folgt $F \ominus \alpha \subseteq G \;\Rightarrow\; 0 = \lambda(F \ominus \alpha) = \lambda(F)$. Damit gilt auch $\lambda^*(G) = \lambda^*(H^c) = 1$.

4. Ist $(\Omega, \mathfrak{A}) := ([0,1), \mathfrak{B} \cap [0,1))$ und $D \subseteq \Omega$ eine Menge, für die gilt $\lambda^*(D) = \lambda^*(D^c) = 1$, so beweise man

   (a) $\mathfrak{S} := \{C \subset \Omega :\; C = A_1 \cup A_2, A_1 \in \mathfrak{A} \cap D, A_2 \in \mathfrak{A} \cap D^c\}$
   $= \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \{D\})$.

   (b) $P((D \cap B_1) \cup (D^c \cap B_2)) := \frac{\lambda(B_1)}{2} + \frac{\lambda(B_2)}{2},\; B_1, B_2 \in \mathfrak{A}$ ist eine wohldefinierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathfrak{S}$.

   (c) Berechnen Sie $P(D)$, $P(B)$ und $P(D \cap B)$ für $B \in \mathfrak{A}$. Welche Beziehung besteht zwischen $\mathfrak{A}$ und $\{D\}$? Bestimmen Sie $P(D|\mathfrak{A})$.

   (d) Ist $\widetilde{P}(.|\mathfrak{A})(.)$ eine reguläre durch $\mathfrak{A}$ bedingte Verteilung auf $\mathfrak{S}$, so gibt es eine P-Nullmenge N, auf deren Komplement N^c gilt $\widetilde{P}([p,q)|\mathfrak{A}) = \mathbb{1}_{[p,q)} \quad \forall\, p, q \in \Omega \cap \mathbb{Q}$. Daraus folgere man, dass für alle $\omega \in N^c$ gilt $\widetilde{P}(\{\omega\}|\mathfrak{A})(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega\}}(\omega) = 1$.

   (e) Nun beweise man, dass gilt $P(D|\mathfrak{A})(\omega) \geq 1 \quad \forall\, \omega \in N^c \cap D$. Ist dies mit dem Ergebnis aus Punkt 4c. vereinbar ?

Lösung: 1. Man kann auch so argumentieren: $\mathfrak{A} \cap D$ ist eine σ-Algebra auf D, $\mathfrak{A} \cap D^c$ ist eine σ-Algebra auf D^c. Daher ist $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra auf Ω. Da jede σ-Algebra, die $\mathfrak{A}$ und D enthält auch $\mathfrak{S}$ enthalten muss, gilt $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \{D\})$.

2. Gemäß Bsp. 1 sind $P_D(B \cap D) := \lambda(B)$ und $P_{D^c}(B \cap D^c) := \lambda(B)$ wohldefinierte Maße auf $\mathfrak{A} \cap D$ bzw. $\mathfrak{A} \cap D^c$. Daher ist P wohldefiniert auf $\mathfrak{S}$.

3. $D = (D \cap \Omega) \cup (D^c \cap \emptyset) \;\Rightarrow\; P(D) = \frac{\lambda(\Omega)+\lambda(\emptyset)}{2} = \frac{1}{2}$.
$B \in \mathfrak{A},\; B = (D \cap B) \cup (D^c \cap B) \;\Rightarrow\; P(B) = \frac{\lambda(B)+\lambda(B)}{2} = \lambda(B)$.

$B \cap D = (B \cap D) \cup (\emptyset \cap D^c) \;\Rightarrow\; P(B \cap D) = \frac{\lambda(B)}{2} = P(B)\,P(D)$. Daher ist D unabhängig von $\mathfrak{A} \;\Rightarrow\; P(D|\mathfrak{A}) = \mathbb{E}\,\mathbb{1}_D = P(D) = \frac{1}{2}$ P–fs.

4. $[p,q) \in \mathfrak{A} \;\Rightarrow\; \widetilde{P}([p,q)|\mathfrak{A}) = P([p,q)|\mathfrak{A}) = \mathbb{1}_{[p,q)}$ P–fs, d.h. für alle $p,q \in \Omega \cap \mathbb{Q}$ gibt es ein $N_{p,q}$ mit $P(N_{p,q}) = 0$ und $\widetilde{P}([p,q)|\mathfrak{A}) = \mathbb{1}_{[p,q)}$ auf $N_{p,q}^c$. Natürlich ist auch $N := \bigcup\limits_{p,q} N_{p,q}$ eine P-Nullmenge, und auf N^c gilt

$$\widetilde{P}([p,q)|\mathfrak{A}) = \mathbb{1}_{[p,q)} \quad \forall\, p,q \in \Omega \cap \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Zu jedem $\omega \in N^c$ gibt es $p_n \nearrow \omega$ und $q_n \searrow \omega,\; p_n, q_n \in \Omega \cap \mathbb{Q}$. Damit gilt $\lim\limits_n \mathbb{1}_{[p_n,q_n)} = \mathbb{1}_{\{\omega\}}$, aber auch $\lim\limits_n \widetilde{P}([p_n,q_n)|\mathfrak{A})(\omega) = \widetilde{P}(\{\omega\}|\mathfrak{A})(\omega)$, da $\widetilde{P}(.|\mathfrak{A})(\omega)$ als Wahrscheinlichkeitsverteilung stetig von oben ist. Zusammen mit (1) ergibt das $P(\{\omega\}|\mathfrak{A})(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega\}}(\omega) = 1 \quad \forall\, \omega \in N^c$.

5. Für $\omega \in N^c \cap D$ gilt $\{\omega\} \subseteq D \Rightarrow \widetilde{P}(D|\mathfrak{A})(\omega) \geq \widetilde{P}(\{\omega\}|\mathfrak{A})(\omega) = 1$. Dies widerspricht $\widetilde{P}(D|\mathfrak{A}) = \frac{1}{2}$ P–fs, denn wegen $0 = P(N \cap D)$ und $P(D) = \frac{1}{2}$ gilt $P(N^c \cap D) = \frac{1}{2}$, d.h. $N^c \cap D$ ist keine P-Nullmenge.