2. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

1. Die Poissonverteilung $P(\lambda)$ hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion
$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \ (x \geq 0).$$
Zeigen Sie, dass dies als Grenzwert der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung mit $p = \lambda/n$, $n \to \infty$ erhalten werden kann.

2. Es sei
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^2/4 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$
   (a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.
   (b) X sei nach F verteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X \leq 1)$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$.

3. X und Y seien unabhängig poissonverteilt mit Parameter λ und μ. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

4. X und Y seien unabhängig gleichverteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

5. X sei gleichverteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Verteilung von $-\log X$.

6. X und Y haben eine gemeinsame Verteilung mit der Dichte
$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{für } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Bestimmen c und die Randdichten von X und Y.

7. Ein Würfel wird dreimal geworfen. X sei die größte der drei Augenzahlen, Y die kleinste. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y und die beiden Randverteilungen.