3. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

1. X und Y seien unabhängig gammaverteilt mit Parametern (α, λ) und (β, λ). Zeigen Sie, dass $S = X + Y$ ebenfalls gammaverteilt ist.

2. X und Y seien unabhängig gammaverteilt mit Parametern (α, λ) und (β, λ). Zeigen Sie, dass $Q = X/(X+Y)$ betaverteilt ist (für Wagemutige: bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von S und Q und zeigen Sie, dass sie unabhängig sind).

3. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Betaverteilung.

4. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der geometrischen Verteilung.

5. Bei einem Spiel kann auf die Ausgänge $1, \ldots, m$ gesetzt werden, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_m$ gezogen werden. Wenn Ausgang i gezogen wird, werden die Einsätze auf i m-fach zurückgezahlt, die anderen verfallen. Ein Spieler spielt nach folgender Strategie: er verteilt sein Kapital K im Verhältnis $q_1 : \ldots : q_m$ (mit $\sum_i q_i = 1$) auf die möglichen Ausgänge und verwendet den Gewinn aus einer Runde als Einsatz in der nächsten.

   (a) Zeigen Sie, dass das Kapital nach n (unabhängigen) Runden
   $$K_n = K_0 X_1 \ldots X_n$$
   ist, mit $\mathbb{P}(X_i = mq_j) = p_j$.

   (b) Bestimmen Sie
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(K_n).$$

   (c) Wie sind $q_1, \ldots, q_m$ zu wählen, damit dieser Grenzwert maximal wird?

6. Wie oft muss man Würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Sechsen mindestens 100 beträgt, mindestens 0.9 ist?

7. Bestimmen Sie die momentenerzeugende Funktion für die Gammaverteilung.