3. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

1. In einer Urne befinden sich je drei schwarze, weiße und graue Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, X sei die Anzahl der weißen, Y die der schwarzen Kugeln. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y, die Randverteilungen und ihre Erwartungswerte.

2. Die gemeinsame Dichte von X und Y ist gegeben durch
$$f(x,y) = \begin{cases} cx/y & \text{für } 0 < x \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Bestimmen Sie c, die Randdichten und Erwartungswerte (hier kann es vorteilhaft sein, $\mathbb{E}(X)$ mithilfe des Satzes vom unachtsamen Statistiker als $\int\int xf(x,y)$ zu berechnen).

3. Bestimmen Sie im vorigen Beispiel die bedingten Dichten von $f_{X|Y}(x|Y = y)$ und $f_{Y|X}(y|X = x)$.

4. Die Poissonverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion
$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \ (x = 0, 1, \ldots)$$
gegeben. Bestimmen Sie ihren Erwartungswert.

5. Bestimmen Sie den Erwartungswert der diskreten Gleichverteilung
$$p_X(x) = \frac{1}{b-a+1}, \ x = a, a+1, \ldots, b$$
und den Erwartungswert von X^2.

6. X hat die Dichte $f(x) = xe^{-x}$ $(x \geq 0)$. Überprüfen Sie, dass f eine Dichte ist, und bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von X.

7. $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig mit der Verteilungsfunktion F_X, $U = \max(X_1, \ldots, X_n)$ und $V = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie:
$$F_U(x) = F_X(x)^n, \ F_V(X) = 1 - (1 - F(x))^n.$$
Bestimmen Sie die Erwartungswerte von U und V, wenn die X_i auf $[0, 1]$ stetig gleichverteilt sind $(f_X(x) = 1 \ (0 \leq x \leq 1))$.