Ausgewählte Kapitel der
WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein SS 2013

ÜBUNGSBLATT 1

1) Für eine stochastische Größe $X \in \mathcal{L}_2$ soll die *Median-Ungleichung* gezeigt werden,

$$\mathbb{E}[|X - m|] \leq \sigma$$

mit Median m und Streuung σ von X.

2) N_t sei ein *Poissonprozess* mit Rate $\lambda > 0$ ($N_t \sim P_{\lambda t}$ mit unabhängigen Zuwächsen). W_k sei die Wartezeit bis zum k-ten Ereignis. Man zeige, dass der Anteil von W_k an W_s bei $s > k$ Beta-verteilt ist, also

$$\frac{W_k}{W_s} \sim \beta(k, s-k) .$$

3) Man berechne die *Mellin-Transformierte* (PGF) der Negativen Binomial-Verteilung.

4) Zu unabhängigen Zufallszahlen U_1, U_2 mit $U_i \sim U_{[0,1]}$ soll gezeigt werden, dass

$$\log\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$$

Laplace- oder *Doppelexponential-verteilt* ist.

5) Für den Quotient X_1/X_2 von unabhängigen Normalverteilungen $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ bestimme man die Verteilung.

6) (Momentenproblem) Die stochastische Größe X ist logarithmisch standardnormalverteilt, d.h. $X = \exp(Y)$ und $Y \sim N(0,1)$.

a) Die Verteilung von nY für $n \in \mathbb{N}$ entspricht der Faltung von n^2 Standardnormalverteilunge n. Damit zeige man, dass

$$\mathbb{E}X^n = \exp(\frac{n^2}{2}) .$$

b) Für jedes $\alpha \in [-1, 1]$ besitzt die Verteilung mit der Dichte auf $\mathbb{R}^+$

$$f_\alpha(x) = f(x)(1 + \alpha \sin(2\pi \log(x)))$$

dieselben Momente wie X, wobei $f(.)$ die Dichte von X bezeichnet.

Was kann man über die Momenterzeugende Funktion von X aussagen?