Ausgewählte Kapitel der WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein SS 2013

ÜBUNGSBLATT 2

7) Auf einem abzählbaren Merkmalsraum Ω kann für eine Folge unabhängiger Ereignisse $E_i \subseteq \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, mit identer Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(E_i) \;=\; \mathbf{P}(E_j)$ für alle $i, j \geq 1$ nur (ein $0-1$-Gesetz)

$$\mathbf{P}(E_i) \;=\; 0 \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{P}(E_i) \;=\; 1$$

gelten.

Hinweis: Man betrachte für jedes $\omega \in \Omega$ die Folge $A_i(\omega) = E_i$, falls $\omega \in E_i$, und $A_i(\omega) = E_i^c$ sonst.

8) Man finde unabhängige Erzeugendensystemen $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, wobei die erzeugten $\sigma-$Algebren $\sigma(\mathcal{E}_1)$ und $\sigma(\mathcal{E}_2)$ nicht unabhängig sind.

9) $\mathcal{M}$ bezeichne die Borel-messbaren Funktionen $(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ Die stochastischen Größen X, Y sind genau dann unabhängig, wenn $g(X), h(Y)$ unabhängig für beliebige $g, h \in \mathcal{M}$.

10) X sei eine stochastische Größe, die von $f(X)$ unabhängig ist, mit $f \in \mathcal{M}$. Man zeige, dass dies genau dann möglich ist, wenn f fast sicher konstant ist.

11) Die Folge (X_i) sei reellwertig und unabhängig. Man zeige:
Die Summe $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist genau dann fast sicher konstant, wenn alle X_i für $i = 1, \ldots, n$ fast sicher konstant sind.
Gilt das auch für die unendliche Summe $S_\infty = \lim_n S_n$, wenn $\mathbf{P}(S_\infty \in \mathbb{R}) = 1$ oder wenn $\mathbf{P}(S_\infty \in \overline{\mathbb{R}}) = 1$?

12) Die Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ von stochastischen Größen $(X_i)_{i \geq 1}$ sei unabhängig. Man zeige, dass

$$\underline{X} \;=\; \liminf_{n \to \infty} X_n$$

fast sicher konstant sein muss.

Gilt das auch für $\overline{X} \;= \limsup_{n \to \infty} X_n$?