Ausgewählte Kapitel der WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein SS 2013

ÜBUNGSBLATT 3

13) Unter den Voraussetzungen des letzten Beispiels 12) soll gezeigt werden, dass die Cesáro-Limiten

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad\qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

fast sicher konstant sind.

14) $-1 < \rho < 1$ sei die feste Korrelation $\rho = \mathrm{cor}(X_i, X_j)$ für $i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$ bei einer Folge von stochastischen Größen $(X_i)_{i\geq 1}$. Man kläre die Existenz einer solchen Folge für die Fälle:
a) $\rho = 0$ b) $\rho > 0$ c) $\rho < 0$.

15) Für den (homogenen) Poissonprozess $N_t, t > 0$ soll gezeigt werden, dass N_t die Bedingungen des Zählprozesses erfüllt, (also aus der Darstellung in Definition 5.1 folgt auch die in 5.3).

16) Für den Poissonprozess $N_t, t > 0$ mit Rate λ werde das Intervall $[0, t]$ in n gleiche Intervalle geteilt und in jedem Intervall eine Indikatorvariable Y_i für den Eintritt eines Ereignisses definiert.

$$\mathbf{P}[Y_i = 1] \;=\; p_n$$

Man bestimme die Verteilung von

$$S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

und überlege sich, dass $np_n \to \lambda t$ und dass $S_n \to N_t$ in Verteilung für $n \to \infty$.

17) $T_i, i = 1, \ldots, k$ seien die Zwischenankunftszeiten eines Poissonprozess N_t mit Rate λ und S_k die Zeit bis zum k-ten Ereignis. Man bestimme die Verteilung und den Erwartungswert sowohl der minimalen als auch der maximalen Zwischenankunftszeit, wenn $S_k = T$.

18) Die unabhängige Stichprobe der Indikatorvariablen Y_i mit $\mathbf{P}[Y_i = 1] \;=\; p$ sei unabhängig vom Poissonprozess $N_t, t > 0$ mit Rate λ. Man bestimme die Verteilung und Erwartung des Compound Poissonprocess $X(t)$.