ÜBUNGSBLATT 5

25) Mit dem schwachen Gesetz der großen Zahlen soll POISSON'S THEOREM begründet werden: A_i sei eine unabhängige Folge von Ereignissen mit $\mathbf{P}(A_i) = p_i$ und

$$\overline{p}_n \; := \; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i .$$

Für das arithmetische Mittel $\overline{I}_n$ der Indikatoren $\mathbb{1}_{A_i}$ gilt für beliebiges $\epsilon > 0$

$$\mathbf{P}[\ |\overline{I}_n - \overline{p}_n| > \epsilon] \rightarrow \ 0 \ .$$

26) Die fast sichere Konvergenz $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$ ist äquivalent zu der Bedingung, dass für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}[\ |X_m - X| < \epsilon, \forall m \geq n] \ = \ 1 \ .$$

27) Die Folge X_n mit $\mathbb{E}X_n = \mu$ erfülle das schwache Gesetz der großen Zahlen und zudem gelte auch

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[\ |\overline{X}_n - \mu| > \epsilon] \ < \ \infty \ .$$

Man zeige, dass dann auch das starke Gesetz der großen Zahlen für diese Folge gilt.

28) Als eine Folge X_n, die in Wahrscheinlichkeit konvergiert aber nicht fast sicher konvergent sein kann, betrachte man auf $\Omega = [0,1]$ mit Gleichverteilung für $n = 2^k + m$ mit $0 \leq m < 2^k$ die Folge

$$X_n(\omega) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{wenn} \ \ \omega \in [\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man bestimme den Grenzwert für die Wahrscheinlichkeitskonvergenz und zeige, dass X_n nicht fast sicher konvergiert.

29) Es soll eine Folge stochastischer Größen X_n gefunden werden, die zwar das schwache Gesetz der großen Zahlen erfüllt, aber nicht das starke Gesetz.

HINWEIS: Man adaptiere die Folge aus dem letzten Beispiel, sodass alle Erwartungswerte gleich sind und konstruiere daraus eine (abhängige) Folge.