ÜBUNGSBLATT 6

30) Monte Carlo Integration

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ sei stetig mit $m = \max_{x \in [a,b]}$. Mit unabhängigen gleichverteilten Zufallszahlen (U_i, V_i) unter $U_i \sim U_{a,b}$ und $V_i \sim U_{0,m}$ kann durch das arithmetische Mittel $\overline{I}_n$ der Indikatoren

$$\mathbb{1}_k \ := \begin{cases} 1 & \text{wenn } f(U_k) \geq V_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ durch

$$m(b-a)\ \overline{I}_n \ \xrightarrow{\text{f.s.}} \int_a^b f(x)\, dx$$

approximiert werden.

31) Multivariates Gesetz der grossen Zahlen

Für die Folge $X_n \in \mathbb{R}^k$ mit Mittelvektor $\mathbb{E}X_n = \underline{\mu} \in \mathbb{R}^k$ gelte

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}[\ ||\overline{X}_n - \underline{\mu}||_k > \epsilon] \ = \ 0$$

für beliebiges $\epsilon > 0$. Ist das äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz

$$\overline{X}_{in} \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu_i$$

für $i = 1, \ldots, k$?

32) Mit der *Moment-erzeugende Funktion* einer reellwertigen Stochastischen Größe X

$$\psi_X(s) \ := \ \mathbb{E}\ \exp(sX)\ .$$

zeige man folgende Ungleichungen für Abweichungswahrscheinlichkeiten, wobei $\psi_X(s)$ für $s \in [-a, a]$ mit $a > 0$ existiere.

a)

$$\mathbf{P}[X \geq \ t] \ \leq \ \frac{\mathbb{E}(X^+)}{t} \qquad t > 0$$

b) chernoff-schranke

$$\mathbf{P}[X \geq \ t] \ \leq \ \inf_{s \geq 0}\ e^{-s.t}\psi_X(s)$$

Man formuliere die Ungleichungen auch für die Stochastischen Größe $X = \overline{X}_n$, wenn eine unabhängige, identisch verteilte Folge X_i (mit existierender Moment-erzeugende Funktion) zugrunde liegt.

33) Für die folgenden Verteilungen soll die *Chernoff-Transformierte* bestimmt werden:

a) Binomialverteilung $B_{n,p}$

b) Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

c) Exponentialverteilung Ex_λ

und gebe in den drei Fällen eine Abschätzung damit für

$$\mathbf{P}[|\overline{X}_n - \mathbb{E}X| > \epsilon] \ .$$

34) Es sei $\varphi_X(t)$ die charakteristische Funktion der stochastischen Größe X.

a) Man zeige $\varphi_X(-t) \ = \ \overline{\varphi_{-X}(t)}$.

b) Ist auch die Abbildung $t \to |\varphi_X(t)|^2$ die charakteristische Funktion einer stochastischen Größe ?