ÜBUNGSBLATT 7

35) Es soll gezeigt werden:

Die charakteristische Funktion $\varphi_X(t)$ ist genau dann reellwertig, wenn die Verteilung von X symmetrisch um 0 ist (also $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$).

Jede Mischung von symmetrischen, unabhängigen Verteilungen X_i

$$Y \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; X_i$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ist symmetrisch. Gilt dies auch für

$$Y \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \; \alpha_i \; X_i$$

für eine unabhängige Folge und $\sum_i \alpha_i = 1$ und $\alpha_i > 0$?

36) Man begründe, dass für die charakteristische Funktion $\varphi_X(t)$ von X auch der Realteil $\varphi_R(t) \;=\; \mathcal{R}(\varphi_X(t))$ eine charakteristische Funktion ist. Man gebe die zugehörige stochastische Größe an.

37) Man berechne die charakteristische Funktion der Doppelexponentialverteilung DEx_λ. Damit berechne man die charakteristische Funktion der Cauchy-Verteilung durch Verwendung der Inversionsformel.

38) Mit der charakteristischen Funktion $\varphi_X(t)$ von X kann für jedes $a > 0$ die Abschätzung

$$\mathbf{P}[\; |X| > \frac{2}{a} \;] \;\leq\; \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} (1 - \varphi_X(t)) \; dt$$

angegeben werden.

39) Wenn die charakteristischen Funktion $\varphi_X(t)$ von X für ein $t_0 \neq 0$ $\varphi_X(t_0) = 1$ erfüllt, dann ist X diskret verteilt und zwar auf den Punkten $\frac{2\pi n}{t_0}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Zudem soll das für die Poissonverteilung bestätigt werden.