Ausgewählte Kapitel der WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein SS 2013

ÜBUNGSBLATT 8

40) Man verwende den zentralen Grenzverteilungssatz um die folgene Reihenkonvergenz zu zeigen,

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2} .$$

41) Die Stichprobe $X_i, i = 1, \ldots, n$ stamme von der ' kontaminierten ' Verteilung

$$X = (1-\epsilon)X_1 + \epsilon X_2$$

mit $X_1 \sim N(\mu, 1)$, $X_2 \sim C_{\mu,1}$ und unabhängig, $0 < \epsilon < 1$.
Man bestimme die charakteristische Funktion von X und von $\overline{X}_n$.
Existiert ein Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ von $\overline{X}_n \xrightarrow{f.s.} a$?
Besitzt $\overline{X}_n$ eine Grenzverteilung ?
Ist das Wahrscheinlichkeitsmaß von X unbegrenzt teilbar?

42) Es soll eine unabhängige Folge X_i mit $\mathbb{E}|X_i| = \infty$, die aber

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \ldots X_n) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

erfüllt, gefunden werden.
Hinweis: Man kann eine Folge kontaminierter Verteilungen (Beispiel 41) dafür finden.

43) Für ein unabhängiges, zentriertes Schema mit $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ genügt ein beschränktes drittes Moment,

$$\mathbb{E}(|X_i|^3) < M < \infty ,$$

für die Konvergenz von $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0,1)$.
Hinweis: Man prüfe die Lindeberg-Bedingung.

44) Man formuliere den multivariaten Grenzverteilungssatz für die Multinomialverteilung $M_{n,p_1,\ldots,p_k}$ mit den Voraussetzungen von Satz 15.56 und belege dies zusätzlich direkt mit der charakteristische Funktion der Multinomialverteilung.