ÜBUNGSBLATT 10

50) Man betrachte eine unabhängig, identisch verteilte Folge $Z_i = 1 + R_i$ von Zinsfaktoren zum Zinssatz R_i unter Paretoverteilung $Z_i \sim Par_{\tau,1}$ mit Dichte

$$f(x) \;=\; \tau x^{-\tau-1}\, \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)$$

mit $\tau > 0$. Der Zinsfaktor nach n Perioden sei

$$\Psi_n \;=\; \prod_{i=1}^{n} Z_i.$$

Welchen Grenzwert erreicht der Durchschnittszinssatz $\bar{R}_n$ für $n \to \infty$? (Der Durchschnittszinssatz errechnet sich aus dem geometrischen Mittel der Zinsfaktoren.)

51) Für das Zinsmodell aus Beispiel 50) soll das asymptotische Streuverhalten erklärt werden:

a) Man finde reellwertige Folgen a_n und b_n, sodass $\Psi_n^{a_n}.b_n$ eine (nicht triviale) Grenzverteilung (welche ?) besitzt.

b) Man finde reellwertige Folgen c_n und d_n, sodass die Häufungspunkte der Folge $\Psi_n^{c_n}.d_n$ fast sicher ein Intervall bilden.

52) Für die Gamma-Verteilung $\gamma(2, \lambda)$ bestimme man den *Lundberg Exponent*.

53) Das Maximum der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ sei im folgenden mit $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$ bezeichnet. Die Stichprobe stamme von einer Exponentialverteilung $X_i \sim Ex_1$. Man bestimme die Grenzverteilung von $M_n - \log(n)$ und bestimme die Momenterzeugende Funktion dieser Grenzverteilung.

54) Für eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ unter Paretoverteilung $X_i \sim Par_{\tau,1}$ (siehe Beispiel 50) bestimme man reellwertige Folgen a_n, b_n sodass

$$a_n\, M_n + b_n \xrightarrow{D} Z \tag{1}$$

eine (nicht triviale) Grenzverteilung für $n \to \infty$ besitzt.