ÜBUNGSBLATT 11

55) Die Verteilungsfunktion F von X_i sei stetig, auch F^{-1} sei stetig. Man zeige, dass dann

$$Z_n \ := \ n(1 \ - \ F(M_n)) \tag{1}$$

eine Grenzverteilung besitzt und bestimme diese Verteilung.

Daraus soll für die Gleichverteilung $X_i \sim U_{0,1}$ eine Grenzfolge im Sinne von (1) gefunden werden.

56) Für eine gleichverteilte Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim U_{0,\theta}$ besitzt

$$-n \ M_n + n\theta$$

eine Grenzverteilung. In welchen Anziehungsbereich fällt also die Gleichverteilung ?

57) Zur *Hazard-Rate* $h(t) = f(t)/\overline{F}(t)$ einer stetigen Verteilung F auf $(0, \infty)$ soll

a) die Darstellung
$$\overline{F}(t) \ = \ \exp(-H(t))$$
für $H(t) \ = \ \int_0^t h(z)dz$ belegt werden,

b) Verteilungen mit konstanter Rate $h(t) = c$, wachsender Rate $h(t) \nearrow$ und fallender Rate $h(t) \searrow$ für $t \to \infty$ gefunden werden.

58) Die Verteilung mit
$$F(x) \ = \ \exp(-x^{-\alpha})\mathbb{1}_{0,\infty}(x)$$
für $\alpha > 0$ heißt *Frechet-Verteilung* . Man zeige, dass diese Verteilung max-stabil ist, also a_n, b_n existieren, sodass F_n als Verteilungsfunktion von M_n

$$F_n(a_n x + b_n) \ = \ F(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Genau diese Eigenschaft zeige man auch für die Weibull- und die Gumbelverteilung.

59) Für nicht negative X_i (nicht unbedingt unabhängige) stochastische Größen mit Maximum M_n zeige man für beliebiges $c \in \mathbb{R}$

a)

$$M_n \leq c + \sum_{i=1}^{n} (X_i - c)^+$$

b) und daher

$$\mathbb{E}M_n \leq c + \sum_{i=1}^{n} \int_c^{\infty} \mathbf{P}(X_i > t)\ dt$$

c) für identisch exponential verteilte Größen $X_i \sim Ex_\lambda$ gebe man eine obere Schranke für $\mathbb{E}M_n$ an.

60) Für eine Stichprobe X_i mit absolutstetiger Verteilung $X_i \sim F$ sei die stochastische Größe R_n der Indikator des Eintritts eines *Rekords*, d.h.:

$$R_n = 1 \qquad \text{nur wenn} \qquad X_n > \ M_{n-1} = \max(X_1, \ldots, X_{n-1})$$

und 0 sonst. Es soll gezeigt werden, dass $R_n \sim B_{1,1/n}$ Binomial-verteilt und unabhängig sind.

Hinweis: Man betrachte die Permutation π^n der Zahlen $1, \ldots, n$, die sich aus der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ durch $X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < \ldots X_{\pi_n}$ (Ränge der Ordnungsstatistiken) ergibt. Diese Permutation muß aus einem Raum der Permutationen mit Gleichverteilung darauf kommen. π^n ist unabhängig von R_{n+1}.

61) Es sei $\boldsymbol{R_n}$ die Anzahl der Rekorde bis n.

a) Man zeige die Äquivalenzen

$$\mathbb{E}\boldsymbol{R_n} \simeq \log(n) \qquad \text{und} \qquad Var(\boldsymbol{R_n}) \simeq \log(n)$$

für $n \to \infty$.

b) Es gilt

$$\frac{\boldsymbol{R_n} - \log(n)}{\sqrt{\log(n)}} \xrightarrow{D} N(0,1) \qquad .$$

Hinweis: Man prüfe die Voraussetzungen des zentralen Grenzverteilungssatzes mit Hilfe der Lyapunov-Bedingung.

62) Zur Verteilungsfunktion der Stichprobe $X_i \sim F$ sei das 'Trägerende'

$$T^{\tilde{}} := \sup\{x | F(x) < 1\}$$

Dann konvergiert das Maximimum gegen $T^{\tilde{}}$,

$$\lim_{n\to\infty} M_n \xrightarrow{f.s.} T^{\tilde{}} \quad .$$