1. Übung Ausgewählte Kapitel SS14

1. Zeigen Sie, dass aus der punktweisen Konvergenz von $e^{ia_n t}$ die Konvergenz von a_n folgt.

2. Zeigen Sie: wenn die Folgen (X_n) und (X_n+a_n) in Verteilung konvergieren, dann ist (a_n) konvergent.

3. Zeigen Sie: wenn (X_n) in Verteilung gegen einen nichttrivialen Grenzwert konvergiert und $(a_n X_n)$ mit $a_n \geq 0$ ebenfalls in Verteilung konvergiert, dann konvergiert (a_n).

4. Bestimmen Sie das Lévy-Maß für die Exponentialverteilung.

5. Zeigen Sie, dass eine Mischung von geometrischen Verteilungen (d.h. $\mathbb{P}(X = n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (1-p_j) p_j^n, \sum \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, 0 \leq p_1 < \ldots < p_k < 1$)unendlich teilbar ist. (zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion die Form
$$\phi(t) = \frac{\prod_{j=1}^{k-1} \frac{1-\theta_j e^{it}}{1-\theta_j}}{\prod_{j=1}^{k} \frac{1-p_j e^{it}}{1-p_j}}$$
mit $p_j < \theta_j < p_{j+1}$ hat).

6. Das Maximum M_n von n unabhängig exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter 1 hat dieselbe Verteilung wie die Summe $Y_1 + \ldots + Y_n$ mit unabhängigen Y_j, wobei Y_j mit Parameter j exponentialverteilt ist. Bestimmen Sie die Grenzverteilung von $M_n - \log n$ für $n \to \infty$ (die ist dann auch unendlich teilbar).

7. Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion
$$F(x) = 1 - (x+1)^{-c} \; x \geq 0$$
unendlich teilbar ist (stellen Sie die Dichte als Mischung von Exponentialdichten dar).

8. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = k!^2) = 1/k!)$ $k \geq 2$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 3 - e$. Zeigen Sie dass $S_{n!}/n!^2$ gegen eine Poissonverteilung konvergiert (mit einer Modifikation dieser Idee kann jede unendlich teilbare Verteilung als Grenzverteilung einer skalierten Teilfolge der Partialsummen von i.i.d. Zufallsvariablen erhalten werden).