2. Übung Ausgewählte Kapitel SS14

1. (X_n) sei eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $S_n/ntoa$ in Wahrscheinlichkeit genau dann, wenn
$$\lim_{M\to\infty} M\mathbb{P}(|X|>M)=0$$
und
$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{E}(X[|X|\le M])=0.$$

2. (X_{nk}) sei eine gleichmäßig kleine Dreiecksfolge mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass S_n genau dann gegen eine Poissonverteilung mit Parameter λ konvergiert, wenn
$$\sum_k \mathbb{P}(X_{nk}=1)\to\lambda$$
und
$$\sum_k \mathbb{P}(X_{nk}>1)\to 0.$$

3. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit Dichte $x^{-3}[|x|\ge 1]$. Zeigen Sie, dass
$$\frac{S_n}{\sqrt{n\log n}}$$
gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

4. X sei exponentialverteilt. Zeigen Sie, dass für jedes $0<c<1$ $\phi_X(t)/\phi_X(ct)$ charakteristische Funktion einer Wahrschinlichkeitsverteilung ist.

5. Zeigen Sie: wenn für jedes $0<c<1$ $\phi(t)/\phi(ct)$ charakteristische Funktion ist, dann gibt es eine Folge (X_n) von unabhängigen Zufallsvariablen, sodass S_n/n in Verteilung gegen die Verteilung mit der charakteristischen Funktion ϕ konvergiert.