4. Übung Ausgewählte Kapitel SS14

1. Zeigen Sie: wenn R und S positive Operatoren im Hilbertraum sind, S nuklear und $(h, Rh) \leq (h, Sh)$, dann ist auch R nuklear.

2. X, Y seien Banachräume. Zeigen Sie, dass der Raum der nuklearen Operatoren $X \to Y$ mit der nuklearen Norm ein Banachraum ist. ($\|T\|_{nuc} = \inf\{\sum_n \|x_n^*\| \|y_n\| : x_n^* \in X^*, y_n \in Y, T(x) = \sum < x_n, x > y_n\}$).

3. Zeigen Sie, dass die nukleare Topologie eine Nullumgebungsbasis der Form $\{[(Sh, h) < 1] : S \in \mathcal{S}\}$ besitzt.

4. Zeigen Sie, dass jede normalverteilte Zufallsvariable in der Form $\sum_n x_n \xi_n$ mit $x_n \in H$, $\sum \|x_n\|^2 < \infty$ und (ξ_n) unabhängig standardnormalverteilt dargestellt werden kann. Umgekehrt ergibt jede solche Reihe eine normalverteilte Zufallsvariable.