2. Übung aus Informations- und Codierungstheorie
SS 2016

1. Man zeige, dass für jede Wahrscheinlichkeitsverteilung $P = (p_1, \ldots, p_m)$ mit $p_1 \leq \ldots \leq p_m$ gilt

$$H^*(P) \leq \sum_{i=1}^{m} i\, p_i - p_m. \tag{1}$$

2. Man zeige, dass für nichtnegative Zahlen $a_i, b_i,\ 1 \leq i \leq m$ stets gilt

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \, \log \frac{a_i}{b_i} \geq \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \right) \log \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} b_i} \right), \tag{2}$$

   wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $\frac{b_i}{a_i} = c \quad \forall\, 1 \leq i \leq m.$

3. Man zeige, dass für alle $\epsilon > 0$ eine Verteilung P_ϵ existiert, sodass die mittlere Wortlänge des optimalen Codes größer als $H(P_\epsilon) + 1 - \epsilon$ ist.

4. Sind $P = (p_1, \ldots, p_m)$ und $Q = (q_1, \ldots, q_m)$ 2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen, für die gilt $q_1 \geq \ldots \geq q_m$ und $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i \geq \sum\limits_{i=1}^{k} q_i$ für alle $k = 1, \ldots, m$, so zeige , dass gilt: $H(P) \leq H(Q)$.
   Interpretieren Sie dieses Ergebnis.
   Hinweis: Da $f_i := -\log q_i$ monoton steigt, kann man f_i durch eine Summe von Differenzen $d_1 := f_1,\ d_i := f_i - f_{i-1}$ darstellen.

5. Aus einer Urne mit 2 verschiedenen Arten von Kugeln werden n Kugeln gezogen. Sei $X := (X_1, \ldots, X_n)$ das Ergebnis der n Ziehungen, wenn mit Zurücklegen gezogen wird, und sei $Y := (Y_1, \ldots, Y_n)$ das Ergebnis bei Ziehungen ohne Zurücklegen. Man zeige: $H(Y) \leq H(X)$.