3. Übung aus Informations- und Codierungstheorie
SS 2016

1. Man würfelt. Ist die Augenzahl X kleiner als 5, so wird danach eine Münze einmal geworfen, falls $X > 4$ gilt, wirft man die Münze zweimal. Man bestimme die Information zwischen X und Y, wobei Y die Anzahl der *Adler* beim Werfen der Münze bezeichnet.

2. Man zeige, dass für alle Zufallsvariablen X , Y und jede Funktion $g(X)$ von X gilt

   (a) $H(g(X)) \leq H(X)$.

   (b) $H(Y|X) \leq H(Y|g(X))$.

3. Sind X, Y zwei Zufallsvariable und $S := X + Y$, so zeige man:

   (a) $H(S|X) = H(Y|X)$,

   (b) X, Y unabhängig $\Rightarrow \max(H(X), H(Y)) \leq H(S)$,

   (c) es gibt (X, Y), sodass $\min(H(X), H(Y)) \geq H(S)$,

   (d) $H(S) = H(X) + H(Y)$ gilt genau dann, wenn X, Y unabhängig sind und es eine Bijektion ϕ zwischen S und (X, Y) gibt.

4. Man beweise:

   (a) $H(Y, Z \mid X) \leq H(Y \mid X) + H(Z \mid X)$

   (b) $H(Y, Z \mid X) = H(Y \mid X) + H(Z \mid X)$ gilt genau dann, wenn $p(y, z|x) = p(y|x)p(z|x) \quad \forall\, x, y, z.$

   (c) $I((X, Y), Z) \geq I(X, Z)$

   (d) $H(X, Y, Z) - H(X, Y) \leq H(X, Z) - H(X)$

   (e) $H(Y, Z \mid X) = H(Y \mid X) + H(Z \mid X, Y)$

5. Man zeige, dass mit $I(X, Y|Z) := H(X|Z) - H(X|Y, Z)$ gilt

   (a) $I(X, Y|Z) = \sum\limits_{x,y,z} p(x, y, z)\, \log_2 \frac{p(x,y|z)}{p(x|z)\, p(y|z)}$,

   (b) ist (X, Y, Z) eine Markoffkette, so gilt $I(X, Y|Z) \leq I(X, Y)$.