3. Übung aus Informations- und Codierungstheorie
SS 2016

1. Man würfelt. Ist die Augenzahl X kleiner als 5, so wird danach eine Münze einmal geworfen, falls $X > 4$ gilt, wirft man die Münze zweimal. Man bestimme die Information zwischen X und Y, wobei Y die Anzahl der *Adler* beim Werfen der Münze bezeichnet.

   Lösung : $PX^{-1} = (\frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{6})$, $P(Y = .|X = i) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $\quad i \leq 4$, $P(Y = .|X = i) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $\quad i \geq 5, 6$. Damit ergibt sich $P(X,Y)^{-1}$ zu

$X \backslash Y$	0	1	2	PX^{-1}
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$
PY^{-1}	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	

$$\begin{aligned} I(X,Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= \frac{5}{12}\log_2\frac{12}{5} + \frac{1}{2}\,\mathrm{ld}\,2 + \frac{1}{12}\log_2 12 - \frac{2}{3}\underbrace{\left[H(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right]}_{1} - \frac{1}{3}H(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}) \end{aligned}$$

2. Man zeige, dass für alle Zufallsvariablen X , Y und jede Funktion $g(X)$ von X gilt $H(g(X)) \leq H(X)$ und $H(Y|X) \leq H(Y|g(X))$.

   Lösung : Da aus $Y = g(X)$ offensichtlich $H(Y|X) = 0$ folgt, gilt $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y) = H(X) + H(Y|X) = H(X)$. Das impliziert $H(Y) \leq H(X)$.

   Da $Y \to X \to g(X)$ und damit auch $g(X) \to X \to Y$ eine Markoff-Kette ist, gilt $H(Y|g(X)) \geq H(Y|X, g(X)) = H(Y|X)$.

3. Sind X, Y zwei Zufallsvariable und $S := X + Y$, so zeige man:

   (a) $H(S|X) = H(Y|X)$,

   (b) sind X, Y unabhängig, so gilt $\max(H(X), H(Y)) \leq H(S)$,

   (c) es gibt (X, Y), sodass $\min(H(X), H(Y)) \geq H(S)$,

   (d) $H(S) = H(X) + H(Y)$ gilt genau dann, wenn X, Y unabhängig sind und es eine Bijektion ϕ zwischen S und (X, Y) gibt.

   Lösung :

3a : $S = f(X,Y) = X + Y \;\Rightarrow\; H(S|X,Y) = 0$. Umgekehrt gilt auch $Y = g(X,S) = S - X \;\Rightarrow\; H(Y|X,S) = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= H(Y|X) + H(S|X,Y) \\ &= H(S,Y|X) = H(S|X) + H(Y|X,S) = H(S|X)\,. \end{aligned}$$

3b : Aus X, Y unabhängig und 3a. folgt $H(Y) = H(Y|X) = H(S|X)$. Somit gilt $H(Y) = H(Y|X) = H(S|X) \le H(S)$.

3c : $X \sim B_{\frac{1}{2}}\,, Y := -X \;\Rightarrow\; H(X) = H(Y) = 1 \wedge S = X + Y \equiv 0$, d.h. $H(S) = 0 \le \min(H(X), H(Y))$.

3d : Wegen $H(S|X,Y) = 0$ gilt

$$\begin{aligned} H(S) &\le H(S) + H(X,Y|S) = H(X,Y,S) \\ &= H(X,Y) + H(S|X,Y) \\ &= H(X) + H(Y|X) \le H(X) + H(Y). \end{aligned} \tag{1}$$

Gilt $(X,Y) = \phi(S)$, so folgt daraus $H(X,Y|S) = 0$. Daher wird die 1-te Ungleichung in (1) zu einer Gleichung. Bei unabhängigem X, Y gilt $H(Y) = H(Y|X)$, sodass auch die 2-te Ungleichung eine Gleichung wird. Somit $H(S) = H(X) + H(Y)$.

Aus $H(S) = H(X) + H(Y)$ und (1) folgt $H(Y) = H(Y|X)$, also X, Y unabhängig, aber auch $H(X,Y|S) = 0 \;\Rightarrow\; (X,Y) = \phi(S)$.

Bsp für Bijektion zwischen (X,Y) und S : X, Y unabhängig
$P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}\,, P(Y = 2) = P(Y = 4) = \frac{1}{2}\,.$
$S = 2 \;\Rightarrow\; (X,Y) = (0,2)\,, S = 3 \;\Rightarrow\; (X,Y) = (1,2)\,,$
$S = 4 \;\Rightarrow\; (X,Y) = (0,4)\,, S = 5 \;\Rightarrow\; (X,Y) = (1,4)\,.$

4. Man beweise:

   (a) $H(Y,Z \mid X) = H(Y \mid X) + H(Z \mid X,Y)$,

   (b) $H(Y,Z \mid X) \le H(Y \mid X) + H(Z \mid X)$,

   (c) $H(Y,Z \mid X) = H(Y \mid X) + H(Z \mid X)$ gilt genau dann, wenn $p(y,z|x) = p(y|x)p(z|x) \quad \forall\, x, y, z$,

   (d) $I((X,Y),Z) \ge I(X,Z)$,

   (e) $H(X,Y,Z) - H(X,Y) \le H(X,Z) - H(X)$.

Lösung :

(a)

$$
\begin{aligned}
H(Y,Z|X) &= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\ \log p(y,z|x) \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\ \log(p(y|x)\,p(z|x,y)) \\
&= -\sum_{x,y} \log p(y|x) \sum_{z} p(x,y,z) - \sum_{z} p(x,y,z)\ \log p(z|x,y) \\
&- \sum_{x,y} p(x,y) \log p(y|x) + H(Z|Y,X) = H(Y|X) + H(Z|Y,X)
\end{aligned}
$$

(b) folgt sofort aus 4a.

(c) $H(Y,Z \mid X) = H(Y \mid X) + H(Z \mid X) \Leftrightarrow H(Z|X,Y) = H(Z|X)$
$\Leftrightarrow 0 = H(Z|X) - H(Z|X,Y) = \sum\limits_{x,y} p(x,y) \sum\limits_{z} p(z|x,y)\ \log \frac{p(z|x,y)}{p(z|x)}$
$= \sum\limits_{x,y} p(x,y)\, D\left(P_{Z|x,y}\, | P_{Z|x}\right) \Leftrightarrow P_{Z|x,y} = P_{Z|x} \quad \forall\, x,y$. Die Beziehung gilt also genau dann, wenn $Y \to X \to Z$ eine Markoffkette ist, und genau dann gilt auch $p(y,z|x) = p(y|x)p(z|x) \quad \forall\, x,y,z$.

(d) $I((X,Y),Z) = H(Z) - H(Z|X,Y) \geq H(Z) - H(Z|X) = I(X,Z)$.

(e) $H(X,Y,Z) - H(X,Y) = H(Z|X,Y) \leq H(Z|X)$
$= H(X,Z) - H(X)$.

5. Man zeige für $I(X,Y|Z) := H(X|Z) - H(X|Y,Z)$

   (a) $I(X,Y|Z) = \sum\limits_{x,y,z} p(x,y,z)\ \log_2 \frac{p(x,y|z)}{p(x|z)\,p(y|z)}$,

   (b) ist (X,Y,Z) eine Markoffkette, so gilt: $I(X,Y|Z) \leq I(X,Y)$

   Lösung:

$$
\begin{aligned}
I(X,Y|Z) &= \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\ \log \frac{p(x|y,z)}{p(x|z)} \\
&= \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\ \log \frac{p(x,y,z)\,p(z)}{p(x|z)\,p(y,z)\,p(z)} \\
&= \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\ \log_2 \frac{p(x,y|z)}{p(x|z)\,p(y|z)}.
\end{aligned}
$$

   Da für Markoffketten (X,Y,Z) gilt $H(X|Y,Z) = H(X|Y)$, erhält man

$$
\begin{aligned}
I(X,Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y,Z) = H(X|Z) - H(X|Y) \\
&\leq H(X) - H(X|Y) = I(X,Y).
\end{aligned}
$$