4. Übung aus Informations- und Codierungstheorie SS 2016

1. Sind $X_1, \ldots, X_n$ $\;n$ binäre Zufallsvariable, so versteht man unter einem *run* eine Teilfolge $X_i, \ldots, X_j$, $i \leq j$, sodass gilt $X_i = X_k$, $\forall\ i \leq k \leq j$ und $i = 1 \ \vee\ X_{i-1} \neq X_i$ und $j = n \ \vee\ X_j \neq X_{j+1}$. Sei $\mathbf{R} := (R_1, \ldots, R_N)$ der Vektor der *run*-Längen in $\mathbf{X} := (X_1, \ldots, X_n)$ (d.h. N ist die Anzahl der *runs* und daher auch eine Zufallsvariable). Man zeige $H(\mathbf{R}) \leq H(X_1, \ldots, X_n) \leq H(\mathbf{R}) + 1$.

2. Man zeige, dass für Markoffketten $X_0, \ldots, X_n$ gilt
$$H(X_0|X_n) \geq H(X_0|X_{n-1}). \tag{1}$$

3. Man zeige: $I((X_1, \ldots, X_n), Y) = I(X_1, Y) + \sum\limits_{i=2}^{n} I(X_i, Y|X_1, \ldots, X_{i-1})$.

4. Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $P = (p_1, \ldots, p_m)$ zeige man
   (a) sind $p_{(1)} \leq \cdots \leq p_{(m)}$ die der Größe nach geordneten p_i so gilt für $0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_m$ und jede Permutation $\pi_1, \ldots \pi_m$ von $1, \ldots, m$
   $$\sum_{i=1}^{m} f_i\, p_{(m+1-i)} \leq \sum_{i=1}^{m} f_i\, p_{\pi_i}, \tag{2}$$
   (b) durch vollständige Induktion
   $$H^*(P) \leq \sum_{i=1}^{m-1} i\, p_{(m+1-i)} + (m-1)\, p_{(1)} = \sum_{i=1}^{m} i\, p_{(m+1-i)} - p_{(1)}, \tag{3}$$
   und geben Sie einen Binärcode an, dessen mittlere Wortlänge mit der oberen Schranke in Ungleichung (3) übereinstimmt.

5. Man zeige, dass $H(p_1, \ldots, p_m) = -\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \ \mathrm{ld}\, p_i$ die einzige Funktion ist, die folgende Bedingungen erfüllt:
   (a) $H(p_1, \ldots, p_m) = H(p_{\pi_1}, \ldots, p_{\pi_m})$ für jede Permutation $\pi_1, \ldots, \pi_m$ von $1, \ldots, m$, d.h. H ist symmetrisch in $p_1, \ldots, p_m$,
   (b) $H(p_1, \ldots, p_m) = H(p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_m) + (p_1 + p_2)\, H\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right)$,
   (c) $H(p, 1-p)$ ist stetig in p,
   (d) $H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$,
   (e) $h(m) := H\left(\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right)$ ist monoton steigend in m.