5. Übung aus Informations- und Codierungstheorie
SS 2016

1. Man bestimme $\min H(X,Y,Z)$, wenn $X \sim Y \sim Z \sim B_{\frac{1}{2}}$ und die Zufallsvariablen paarweise unabhängig sind. Geben Sie ein Beispiel, bei dem das Minimum angenommen wird.

2. Man zeige, dass gilt:

$$\max_p I((X_1,\ldots,X_n),(Y_1,\ldots,Y_n)) \geq n\,[1 - H(q, 1-q)]\,, \tag{1}$$

   wenn die $X_i \sim B_p$ unabhängig sind, und $Y_i := (X_i + Z_i) \bmod 2$ mit $Z_i \sim B_q$, wobei die Z_i unabhängig von den X_i sind aber nicht untereinander unabhängig sein müssen.

3. Man zeige, dass für jede Verteilung $P := (p_1,\ldots,p_m)$ und $i < j$ gilt

$$H(P) \leq H\left(p_1,\ldots,p_{i-1},\frac{p_i+p_j}{2},p_{i+1},\ldots,p_{j-1},\frac{p_i+p_j}{2},p_{j+1},\ldots,p_m\right).$$

4. Man suche den einfachsten Ausdruck für $I(X_1,(X_2,\ldots,X_n))$, wenn $X_1,\ldots,X_n$ eine Markoff-Kette ist.

5. Ist der Code $\{0,1,02,12,22\}$ eindeutig entzifferbar? Wenn ja, ist er endlich oder unendlich eindeutig entzifferbar?