6. Übung aus Informations- und Codierungstheorie SS 2016

1. Sei $P = (p_1, \ldots, p_m)$ mit $p_1 > p_2 \geq \ldots \geq p_m$. Man zeige, dass aus $p_1 > \frac{2}{5}$ folgt, dass das kürzeste Wort im binären Huffman-Code die Länge 1 hat.
2. Sei $P = (p_1, \ldots, p_m)$ mit $p_1 > p_2 \geq \ldots \geq p_m$. Man zeige, dass für $p_1 < \frac{1}{3}$ das kürzeste Wort im binären Huffman-Code aus mindestens 2 Zeichen bestehen muss.
3. Man beweise, dass für jede Verteilung $P = (p_1, \ldots, p_m)$, zu der es einen Präfix-Code C mit den Wortlängen $l_1, \ldots, l_m$ auf dem Codealphabet $\{0, \ldots, r-1\}$ gibt, dessen mittlere Wortlänge $l(C)$ mit $H_r(P)$ übereinstimmt, gilt $m \equiv 1 \bmod (r-1)$ und $p_i = r^{-l_i} \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$.
4. Man zeige, dass es zu jedem Präfixcode zum Codealphabet $\{0, \ldots, r-1\}$, für dessen Wortlängen $l_1, \ldots, l_m$ gilt $\sum\limits_{i=1}^{m} r^{-l_i} < 1$ Codefolgen gibt, die nicht entziffert werden können.
5. Ist $\mathcal{P} := \{P := (p_1, \ldots, p_m) : \ 0 \leq p_i \leq 1, \ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1\}$ die Menge der Verteilungen auf $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$, so zeige man, dass $l(P)$, die mittlere Wortlänge des optimalen Codes zu P, eine stetige Funktion auf $\mathcal{P}$ ist.