7. Übung aus Informations- und Codierungstheorie SS 2016

1. Man beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel die folgenden Aussagen, wenn $\ldots, X_{-1}, X_0, X_1, \ldots$ eine stationäre Quelle ist:
   a) $H(X_n|X_0) = H(X_{-n}|X_0)$,
   b) $H(X_n|X_0) \geq H(X_{n-1}|X_0)$,
   c) $H(X_n|X_1, \ldots, X_{n-1}, X_{n+1}) \geq H(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n, X_{n+2})$.
2. Gegen welchen Grenzwert konvergiert $P\left(X_1, \ldots, X_n\right)^{\frac{1}{n}}$, wenn (X_n) eine diskrete, gedächtnislose Quelle ist?
3. Bestimmen Sie die Entropie einer binären Markoff-Kette mit der Übergangsmatrix $\Pi := \begin{pmatrix} 1-\epsilon\ , & \epsilon \\ \delta & , 1-\delta \end{pmatrix}$ $0 < \epsilon, \delta < 1$, und geben Sie an, für welche Werte von ϵ und δ die Entropie der Quelle ihr Maximum erreicht.
4. Man zeige, dass für eine stationäre Quelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ gilt
$$H_{n,n} := \frac{1}{n} H(\mathbf{X}_0^{n-1}|\mathbf{X}_{-n}^{-1}) \leq H_{n-1,n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{0.1}$$
$$\text{und} \quad H(X) = \lim_n H_{n,n} = \lim_n \frac{1}{n} H(\mathbf{X}_0^{n-1}|\mathbf{X}_{-k}^{-1}) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{0.2}$$
5. Ein Punkt bewegt sich auf den ganzen Zahlen $\ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Ist X_n die Position des Punktes zum Zeitpunkt n, so gilt $X_0 = 0$, d.h. der Punkt startet in 0. Für den Zeitpunkt $n = 1$ gilt $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. In jedem Zeitpunkt $n \geq 2$ wechselt der Punkt mit Wahrscheinlichkeit p seine Richtung. Ist er bspw. zuvor von i nach $i+1$ gegangen, so geht er mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ nach $i+2$ und mit Wahrscheinlichkeit p zurück nach i. Man berechne $H(X_0, \ldots, X_n)$ und $H(X) := \lim_n \frac{H(X_0,\ldots,X_n)}{n+1}$.