# 7. Übung aus Informations- und Codierungstheorie SS 2016

1. Man beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel die folgenden Aussagen, wenn $\ldots, X_{-1}, X_0, X_1, \ldots$ eine stationäre Quelle ist:
   a) $H(X_n|X_0) = H(X_{-n}|X_0)$.
   b) $H(X_n|X_0) \geq H(X_{n-1}|X_0)$.
   c) $H(X_n|X_1, \ldots, X_{n-1}, X_{n+1}) \geq H(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n, X_{n+2})$.
   a) Da die Quelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationär ist, gilt $H(X_{-n}, X_0) = H(X_0, X_n)$. Daraus folgt
   $$\begin{aligned} H(X_0) + H(X_{-n}|X_0) &= H(X_{-n}, X_0) = H(X_0, X_n) \\ &= H(X_0) + H(X_n|X_0) \ \Rightarrow\ H(X_n|X_0) = H(X_{-n}|X_0). \end{aligned}$$
   b) Die Aussage ist falsch, denn für $X_0 \sim X_1 \sim B_{\frac{1}{2}}$ unabhängig und $X_2 := X_0$ gilt $X_i \sim B_{\frac{1}{2}} \quad \forall\ i$ und $(X_0, X_1) \sim (X_1, X_2)$, d.h. $(X_0, X_1, X_2)$ ist stationär, aber: $1 = H(X_1|X_0) > H(X_2|X_0) = 0$.
   c) $H(X_{n+1}|\mathbf{X}_1^n, X_{n+2}) \leq H(X_{n+1}|\mathbf{X}_2^n, X_{n+2}) = H(X_n|\mathbf{X}_1^{n-1}, X_{n+1})$.
2. Gegen welchen Grenzwert konvergiert $P\left(X_1, \ldots, X_n\right)^{\frac{1}{n}}$, wenn $(X_n)$ eine diskrete, gedächtnislose Quelle ist?
   $$P\left(\mathbf{X}_1^n\right)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\log\prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\log P(X_i)} \to \mathrm{e}^{\mathbb{E}\log P(X)} = \mathrm{e}^{-H(X)}.$$
3. Bestimmen Sie die Entropie einer binären Markoffkette mit der Übergangsmatrix $\Pi := \begin{pmatrix} 1-\epsilon\,, & \epsilon \\ \delta & , 1-\delta \end{pmatrix}$ $\quad 0 < \epsilon, \delta < 1$, und geben Sie an, für welche Werte von $\epsilon$ und $\delta$ die Entropie der Quelle ihr Maximum erreicht.
   *Lösung:* Mit $Q := \lim\limits_n \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \Pi^i$ gilt $Q\,\Pi = Q$. Daraus folgt natürlich $(q_{i,0}, 1-q_{i,0}) \begin{pmatrix} 1-\epsilon\,, & \epsilon \\ \delta & , 1-\delta \end{pmatrix} = (q_{i,0}, 1-q_{i,0}),\ \ i = 1, 2$. Das ergibt $q_{i,0} - \epsilon\, q_{i,0} + \delta - \delta\, q_{i,0} = q_{i,0} \ \Rightarrow\ q_0 := q_{i,0} = \frac{\delta}{\delta+\epsilon},\ q_1 := 1 - q_{i,0} = \frac{\epsilon}{\delta+\epsilon}$. Mit $v_0 := -\sum\limits_{j=0}^{1} p_{0,j}\,\log p_{0,j} = (1-\epsilon)\,\log\frac{1}{1-\epsilon} + \epsilon\,\log\frac{1}{\epsilon} = H(\epsilon, 1-\epsilon)$, und $v_1 := -\sum\limits_{j=0}^{1} p_{1,j}\,\log p_{1,j} = \delta\,\log\frac{1}{\delta} + (1-\delta)\,\log\frac{1}{1-\delta} = H(\delta, 1-\delta)$ gilt
   $$\begin{aligned} H(X) &= P_0^T\,Q \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = (p_0, 1-p_0) \begin{pmatrix} q_0\,, & q_1 \\ q_0\,, & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = (q_0, q_1) \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \\ &= q_0 \left((1-\epsilon)\,\log\frac{1}{1-\epsilon} + \epsilon\,\log\frac{1}{\epsilon}\right) + q_1 \left(\delta\,\log\frac{1}{\delta} + (1-\delta)\,\log\frac{1}{1-\delta}\right) \\ &= q_0\,H(\epsilon, 1-\epsilon) + q_1\,H(\delta, 1-\delta) \leq q_0\,H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + q_1\,H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1, \end{aligned}$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $\epsilon = \delta = \frac{1}{2}$, wenn also die Markoffkette eine Folge von unabhängig, $B_{\frac{1}{2}}$-verteilten Zufallsvariablen ist.

4. Man zeige, dass für eine stationäre Quelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ gilt

$$H_{n,n} := \frac{1}{n}\, H(\mathbf{X}_0^{n-1}|\mathbf{X}_{-n}^{-1}) \leq H_{n-1,n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{0.1}$$

$$\text{und} \quad H(X) = \lim_n H_{n,n} = \lim_n \frac{1}{n}\, H(\mathbf{X}_0^{n-1}|\mathbf{X}_{-k}^{-1}) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{0.2}$$

*Beweis:* Aus $H_{n,n} \leq H_{n,k} := \frac{1}{n}\, H(\mathbf{X}_0^{n-1}|\mathbf{X}_{-k}^{0}) \leq \frac{1}{n}\, H(\mathbf{X}_0^{n-1})\ \forall\, n \geq k \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup\limits_n H_{n,n} \leq \limsup\limits_n H_{n,k} \leq \lim\limits_n \frac{1}{n}\, H(\mathbf{X}_0^{n-1}) = H(X)$. Andererseits folgt aus $H_{n,k} \geq H_{n,n} \geq H(X_0|\mathbf{X}_{-n}^{-1}) \quad \forall\, k \leq n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\liminf\limits_n H_{n,k} \geq \liminf\limits_n H_{n,n} \geq \lim\limits_n H(X_0|\mathbf{X}_{-n}^{-1}) = H(X)$. Das ergibt (0.2).

$$\begin{aligned} H(\mathbf{X}_0^{n}|\mathbf{X}_{-n-1}^{-1}) &= H(\mathbf{X}_0^{n-1}|\mathbf{X}_{-n-1}^{-1}) + H(X_n|\mathbf{X}_{-n-1}^{n-1}) \\ &\leq H(\mathbf{X}_0^{n-1}|\mathbf{X}_{-n}^{-1}) + \frac{1}{n+1}\, H(\mathbf{X}_0^{n}|\mathbf{X}_{-n-1}^{-1}) \end{aligned}$$

impliziert

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) H(\mathbf{X}_0^{n}|\mathbf{X}_{-n-1}^{-1}) \leq H(\mathbf{X}_0^{n-1}|\mathbf{X}_{-n}^{-1}) \;\Rightarrow\; H_{n+1,n+1} \leq H_{n,n}.$$

Damit ist auch (0.1) gezeigt.

5. Ein Punkt bewegt sich auf den ganzen Zahlen $\ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Ist $X_n$ die Position des Punktes zum Zeitpunkt $n$, so gilt $X_0 = 0$, d.h. der Punkt startet in $0$. Für den Zeitpunkt $n = 1$ gilt $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. In jedem Zeitpunkt $n \geq 2$ wechselt der Punkt mit Wahrscheinlichkeit $p$ seine Richtung. Ist er bspw. zuvor von $i$ nach $i{+}1$ gegangen, so geht er mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ nach $i+2$ und mit Wahrscheinlichkeit $p$ zurück nach $i$ . Man berechne $H(X_0, \ldots, X_n)$ und $H(X) := \lim\limits_n \frac{H(X_0,\ldots,X_n)}{n+1}$.

*Lösung:* Ist $D_i := X_i - X_{i-1},\ i \geq 1$, so gilt $P(D_1 = 1) = P(D_1 = -1) = \frac{1}{2}$ und für $n \geq 2$ gilt $P(D_n = 1|D_{n-1} = -1) = P(D_n = -1|D_{n-1} = 1) = p$ und $P(D_n = 1|D_{n-1} = 1) = P(D_n = -1|D_{n-1} = -1) = 1-p$, d.h. $D$ ist eine Markoff-Kette mit Anfangsverteilung $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und Übergangsmatrix $\Pi = \begin{pmatrix} 1-p, & p \\ p, & 1-p \end{pmatrix}$. Offensichtlich ist $P_0$ eine stationäre Verteilung, daher gilt $H(\mathbf{D}_1^n) = H(D_1) + (n-1)\, H(D_2|D_1) = 1 + (n-1)\, H(p, 1-p)$. Daraus folgt $H(D) = \lim\limits_n \frac{1}{n}\, H(\mathbf{D}_1^n) = H(p, 1-p)$. Aber es gilt $\mathbf{X}_1^n = f(\mathbf{D}_1^n)$ und $\mathbf{D}_1^n = f^{-1}(\mathbf{X}_1^n) \;\Rightarrow\; H(\mathbf{X}_1^n) = H(\mathbf{D}_1^n) = 1 + (n-1)\, H(p, 1-p)$, bzw. $H(X) = H(D) = H(p, 1-p)$.