8. Übung aus Informations- und Codierungstheorie SS 2016

1. Ist (X_n) eine DMS mit Verteilung $P := PX_i^{-1} = (p_1, \dots, p_m)$ und ist $Q := (q_1, \dots, q_m)$ eine weitere Verteilung auf $X(\Omega)$, so bestimme man

$$\lim_n -\frac{1}{n} \log Q(\mathbf{X}_1^n) \;\text{ und }\; \lim_n \frac{1}{n} \log \frac{P(\mathbf{X}_1^n)}{Q(\mathbf{X}_1^n)}.$$

   Warum wird sich das Ergebnis nicht ohne weiteres auf ergodische Quellen übertragen lassen?
2. Man zeige, dass für eine Quelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $|X(\Omega)| < \infty$ die Folge $Y_0 := P^{-1}(X_0),\; Y_n := P^{-1}(X_0|\mathbf{X}_{-n}^{-1}),\; n \geq 1$ zusammen mit der Filtration $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(\mathbf{X}_{-n}^0)$ ein Martingal bildet.
3. Man zeige, dass für eine Quelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $|X(\Omega)| < \infty$ die Folgen $Z_0 := P(X_0),\; Z_n := P(X_0|\mathbf{X}_{-n}^{-1}),\; n \geq 1$ bzw. $V_0 := \log P(X_0)$, $V_n := \log P(X_0|\mathbf{X}_{-n}^{-1})$, $n \geq 1$ zusammen mit der Filtration $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(\mathbf{X}_{-n}^0)$ Submartingale bilden. Weiters zeige man, dass (Z_n) gleichmäßig integrierbar ist und dass es ein integrierbares V gibt mit $\lim_n V_n = V$ P–fs.
4. Geben Sie ein Beispiel für eine nichtergodische Quelle, für die trotzdem gilt $\lim_n -\frac{1}{n} \log P(\mathbf{X}_0^{n-1}) = const.$
5. Für eine binäre Quelle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wird durch einen fairen Münzwurf entschieden, ob gilt $X_{2n} = X_{2n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ oder $X_{2n} = X_{2n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Die geraden Glieder der Folge sind unabhängig und $B_{\frac{1}{2}}$-verteilt. Die Quelle wird so codiert, dass jedem Tupel (x_{2n}, x_{2n+1}) ein Codewort $c(x_{2n}, x_{2n+1})$ auf folgende Art zugeordnet wird: $c(0,0) := 0, c(1,1) := 10$, $c(1,0) := 110, c(0,1) := 111$. Man zeige, dasss die Quelle stationär und ergodisch ist, dass aber die durchschnittliche Anzahl von Codebuchstaben pro Nachrichtensymbol mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gegen $\frac{3}{4}$ und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gegen $\frac{9}{8}$ konvergiert.