9. Übung aus Informations- und Codierungstheorie SS 2016

1. Man zeige,dass es in Ω^n genau $\binom{n+m-1}{m-1}$ verschiedene Typenklassen gibt.
2. a) Man zeige: $\frac{m!}{n!} \geq n^{m-n} \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}$.
   b) Man zeige, dass $(n_1, \ldots, n_m)$ ein Modus der Multinomialverteilung mit den Parametern n und $p_1 = \frac{n_1}{n}, \ldots, p_m = \frac{n_m}{n}$ ist.
   (*Hinweis:* Verwenden Sie die obige Ungleichung.)
   c) Man beweise, dass für beliebige Typen P und Q auf Ω^n stets gilt:
   $$P([P]) \geq P([Q]),$$
   d.h. die Klasse, deren Typ der Verteilung der Quelle entspricht, ist am wahrscheinlichsten.
3. Man beweise: Ist $P = (\frac{n_1}{n}, \ldots, \frac{n_m}{n})$, so gilt $(n+1)^{-m}\, r^{nH(P)} \leq \binom{n}{n_1, \ldots, n_m}$.
4. Man zeige, dass für eine DMS $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $M := X(\Omega) = \{1, \ldots, m\}$ jeder Typ $T(\mathbf{X}_1^n) := (t_1, \ldots, t_m) := \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{1\}}(X_j), \ldots, \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{m\}}(X_j)\right)$ auf M^n eine Konvexkombination von n Typen auf M^{n-1} ist.
   Ist P die Verteilung von (X_n) auf Ω, so zeige man weiters, dass gilt
   $$\mathbb{E}D(T\left(\mathbf{X}_1^n)|PX_1^{-1}\right) \leq \mathbb{E}D\left(T(\mathbf{X}_1^{n-1})|PX_1^{-1}\right). \tag{0.1}$$
   Hinweis: Löscht man X_i in $\mathbf{X}_1^n$, so erhält man aus $T(\mathbf{X}_1^n)$ für jeden Index $1 \leq i \leq n$ einen Typ auf M^{n-1}.
5. Eine binäre gedächtnislose Quelle sendet 1 mit der Wahrscheinlichkeit 0.005. Nachrichten der Länge 100 werden durch binäre Codeworte fixer Länge k codiert. Wie groß muss k sein, wenn man für alle Nachrichten mit höchstens 3 Einsen ein eigenes Codewort zur Verfügung stellen möchte? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nachricht gesendet wird, für die kein Codewort existiert?