9. Übung aus Informations- und Codierungstheorie SS 2016

1. Man zeige,dass es in Ω^n genau $\binom{n+m-1}{m-1}$ verschiedene Typenklassen gibt.
Lösung: Für die Häufigkeiten $N_i, \quad 1 \leq i \leq m$ gilt $0 \leq N_i \leq n$ und $\sum\limits_{i=1}^{m} N_i = n$. Die Anzahl der Typenklassen stimmt daher überein mit der Anzahl von Möglichkeiten n als Summe von m nichtnegativen Summanden darzustellen. Fasst man jeden Summanden N_i als eine Urne auf, die jeweils N_i Kugeln enthält, so kann man die Urnen durch $m-1$ Striche bzw. 1-en (die Trennwände symbolisieren) darstellen und die Kugeln durch Nullen. Nun gibt es $\binom{n+m-1}{m-1}$ Möglichkeiten, aus $n+m-1$ Stellen n Stellen für die „0“-en auszuwählen.

$$\text{1.Urne } 0\,|_1\, 000\ldots 0\,|_{m-1} 000\, m\text{-te Urne}$$

2. a) Man zeige: $\frac{m!}{n!} \geq n^{m-n} \quad \forall\, m,n \in \mathbb{N}$.
   b) Man zeige, dass $(n_1,\ldots,n_m)$ ein Modus der Multinomialverteilung mit den Parametern n und $p_1 = \frac{n_1}{n},\ldots,p_m = \frac{n_m}{n}$ ist.
   (*Hinweis:* Verwenden Sie die obige Ungleichung.)
   c) Man beweise, dass für beliebige Typen P und Q auf Ω^n stets gilt:
   $$P([P]) \geq P([Q]),$$
   d.h. die Klasse, deren Typ der Verteilung der Quelle entspricht, ist am wahrscheinlichsten.

   Lösung:
   a) Für $m = n$ ist die Ungleichung trivial.
   Für $m > n$ gilt $\frac{m!}{n!} = m\,(m-1)\ldots(n+1) > n^{m-n}$.
   Für $m < n$ gilt $\frac{m!}{n!} = \frac{1}{n\,(n-1)\ldots(m+1)} > \frac{1}{n^{n-m}} = n^{m-n}$.
   b) Da gilt $\frac{n_i}{p_i} = n$ und $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$, erhält man
   $$\frac{M_{n;p_1,\ldots,p_m}(n_1,\ldots,n_m)}{M_{n;p_1,\ldots,p_m}(k_1,\ldots,k_m)} = \frac{\frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} n_i}}{\frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} k_i}} \prod_{i=1}^{m} p_i^{n_i-k_i} = \prod_{i=1}^{m} \frac{k_i}{n_i} \prod_{i=1}^{m} p_i^{n_i-k_i}$$
   $$\geq \prod_{i=1}^{m} n_i^{k_i-n_i} p_i^{n_i-k_i} = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{p_i}{n_i}\right)^{n_i-k_i} = \prod_{i=1}^{m} n^{n_i-k_i} = n^{\sum_{i=1}^{m} n_i - \sum_{i=1}^{m} k_i} = 1$$
   c) Dies folgt sofort aus Punkt b), da gilt $P([P]) = M_{n;p_1,\ldots,p_m}(n_1,\ldots,n_m)$ und $P([Q]) = M_{n;p_1,\ldots,p_m}(k_1,\ldots,k_m)$.

3. Man beweise: Ist $P = (\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_m}{n})$, so gilt $(n+1)^{-m}\, r^{nH(P)} \leq \binom{n}{n_1,\dots,n_m}$. (*Hinweis:* Beachten Sie, dass $1 = \sum_Q P([Q])$ gilt, wenn über alle möglichen Typen Q summiert wird und verwenden Sie die Ergebnisse des vorigen Beispiels.)
Beweis: Da es maximal $(n+1)^m$ Typenklassen gibt und nach Beispiel 2 gilt $P([P]) \geq P([Q])$ für alle anderen Typenklassen $[Q]$, erhält man
$$1 = \sum_Q P([Q]) \leq (n+1)^m\, P([P]) = (n+1)^m \binom{n}{n_1, \dots, n_m} r^{-n\, H(P)}.$$
Daraus folgt sofort $(n+1)^{-m}\, r^{nH(P)} \leq \binom{n}{n_1,\dots,n_m}$.
4. Man zeige, dass für eine DMS $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $M := X(\Omega) = \{1, \dots, m\}$ jeder Typ $T(\mathbf{X}_1^n) := (t_1, \dots, t_m) := \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{1\}}(X_j), \dots, \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{m\}}(X_j)\right)$ auf M^n eine Konvexkombination von n Typen auf M^{n-1} ist.
Ist P die Verteilung von (X_n) auf Ω, so zeige man weiters, dass gilt
$$\mathbb{E}D(T\left(\mathbf{X}_1^n\right)|PX_1^{-1}\right) \leq \mathbb{E}D\left(T(\mathbf{X}_1^{n-1})|PX_1^{-1}\right). \tag{0.1}$$
Hinweis: Löscht man X_i in $\mathbf{X}_1^n$, so erhält man aus $T(\mathbf{X}_1^n)$ für jeden Index $1 \leq i \leq n$ einen Typ auf M^{n-1}.

Lösung: $\widetilde{\mathbf{X}}_\mathbf{i} := (\mathbf{X}_1^{i-1}, \mathbf{X}_{i+1}^n)$ erzeugt auf M^{n-1} den Typ $T_i := T_i(\widetilde{\mathbf{X}}_\mathbf{i})$ mit $T_i := (t_{i,1}, \dots, t_{i,m}) := \left(\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j\neq i} \mathbb{1}_{\{1\}}(X_j), \dots, \frac{1}{n-1}\sum\limits_{j\neq i} \mathbb{1}_{\{m\}}(X_j)\right)$. Für die Konvexkombination $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i$ gilt daher
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_{i,k} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{j\neq i} \mathbb{1}_{\{k\}}(X_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{k\}}(X_j) \sum_{i\neq j} \frac{1}{n\,(n-1)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\{k\}}(X_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{k\}}(X_j) = t_k \forall k \in M \ \Rightarrow\ T(\mathbf{X}_1^n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i.\end{aligned}$$
Da $D(.|.)$ konvex ist, gilt
$$D(T\left(\mathbf{X}_1^n\right)|PX_1^{-1}\right) = D\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}T_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}PX_1^{-1}\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} D(T_i|PX_1^{-1}).$$
Daraus und weil alle $T_i = T_i(\widetilde{\mathbf{X}}_\mathbf{i})$ identisch verteilt sind, folgt
$$\mathbb{E}D(T\left(\mathbf{X}_1^n\right)|PX_1^{-1}\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\mathbb{E}D(T_i|PX_1^{-1}) = \mathbb{E}D\left(T(\mathbf{X}_1^{n-1})|PX_1^{-1}\right).$$

5. Eine binäre gedächtnislose Quelle sendet 1 mit der Wahrscheinlichkeit 0.005. Nachrichten der Länge 100 werden durch binäre Codeworte fixer Länge k codiert. Wie groß muss k sein, wenn man für alle Nachrichten mit höchstens 3 Einsen ein eigenes Codewort zur Verfügung stellen möchte? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nachricht gesendet wird, für die kein Codewort existiert?
Lösung: $\binom{100}{0} + \binom{100}{1} + \binom{100}{2} + \binom{100}{3} = 101 + 4950 + 161700 = 166751$. Da weiters gilt $2^{17} = 131072 < 166751 < 2^{18} = 262144$, benötigt man 18 Bits. Ist $X \sim B_{100,0.005}$ die Anzahl der Einsen, so gilt $P(X \geq 4) \leq 0.00167$.