10. Übung aus Informations- und Codierungstheorie SS 2016

1. Man zeige, dass eine maßtreue Transformation T auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ genau dann ergodisch ist, wenn gilt

$$A \in \mathfrak{S} \wedge P(A) > 0 \;\Rightarrow\; P\left(\limsup_n T^{-n}(A)\right) = 1. \tag{0.1}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $B_n := \bigcup\limits_{k \geq n} T^{-k}(A) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ P–fs invariant ist.

2. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine stationäre, ergodische Quelle mit $P(X_0 = a) > 0$, so zeige man, dass für $\tau := \min\{n \geq 1 : X_n = a\}$ gilt

$$\int\limits_{[X_0=a]} \tau \, dP = 1 \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{E}(\tau | X_0 = a) = \frac{1}{P(X_0 = a)}. \tag{0.2}$$

Hinweis: Nach Beispiel 1 ist $\nu := \min\{n \geq 0 : X_n = a\}$ P–fs endlich, sodass gilt $1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(\nu = n)$. Außerdem kann man $[\nu = n]$ darstellen in der Form $[\nu = n] = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [X_{-k} = a, X_{-k+1} \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a, X_n = a]$.

3. Man zeige, dass für die Wartezeit $\tau := \min\{n \geq 1 : X_n = X_0\}$ einer stationären, ergodischen Quelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $X(\Omega) = \{1, \ldots, m\}$ gilt

$$\mathbb{E}\tau = m \quad \text{und} \quad \mathbb{E} \log \tau \leq H(X_0). \tag{0.3}$$

4. Man kann ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit einem Codealphabet der Größe $r \geq 2$ codieren, indem man zunächst $k := k(n) := \lfloor \log_r n \rfloor + 1$ und $m := m(n) := \min\{j : k \leq \frac{j\,(j+1)}{2}\}$ bestimmt. Dann schreibt man n als $\frac{m(m+1)}{2}$-stellige Zahl im Zahlensystem zur Basis r an, wobei überflüssige führende Stellen mit Nullen besetzt werden. Nun bildet man ein Codewort aus insgesamt $\frac{m(m+1)}{2} + m$ Codebuchstaben. In die Stellen $h_i := \sum\limits_{j=1}^{i} j + i = \frac{i\,(i+1)}{2} + i, \quad i \geq 1$ schreibt man Prüfbits b_i mit $b_i := 0$ für $\frac{i\,(i+1)}{2} < k$ und $b_i := 1$ sonst. Auf die anderen Stellen kommen die Ziffern von n. Man zeige, dass dieser Code präfixfrei ist und dass für die Codewortlängen l_n gilt $l_n = \log_r n + o(\log_r n)$.

5. Das Alphabet einer Nachrichtenquelle besteht aus den 4 Buchstaben $\{a, b, c, d\}$, und das Codealphabet ist binär.
   a) Codieren Sie die Folge *bbcbadadcdcb* mit dem Lempel-Ziv-Verfahren.
   b) Dekodieren Sie die folgende mit dem Lempel-Ziv-Verfahren erzeugte Codefolge: $(0000, 00), (0001, 01), (0010, 01), (0000, 0010), (0000, 11),$ $(0101, 11), (0100, 11), (0000, 01), (0001, 00), (1000, 01)$.