11. Übung aus Informations- und Codierungstheorie SS 2016

1. Aus 2 Kanälen $(X_i, Y_i, \pi_i(y_i|x_i)),\ i = 1, 2$ mit den Kapazitäten C_1, C_2 wird der Kanal $((X_1, X_2), (Y_1, Y_2), \pi((y_1, y_2)|(x_1, x_2)) := \pi_1(y_1|x_1)\, \pi_2(y_2|x_2))$ gebildet. Welche Kapazität hat der neue Kanal?
2. Ein Kanal heißt symmetrisch, wenn jede Zeile der Übergangsmatrix eine Permutation der ersten Zeile dieser Matrix ist und wenn auch die Spalten Permutationen voneinander sind. Man berechne die Kanalkapazität eines symmetrischen Kanals.
3. Für einen Kanal mit dem Eingangsalphabet $\{0, 1\}$, dem Ausgangsalphabet $\{0, e, 1\}$ und den Übergangswahrscheinlichkeiten $p(0|0) = p(1|1) = 1 - \varepsilon$, $p(e|0) = p(e|1) = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1$ berechne man die Kanalkapazität.
4. Man zeige, dass n hintereinander geschaltete binäre, symmetrische Kanäle mit Fehlerwahrscheinlichkeit $0 < \varepsilon < 1$ einem binären, symmetrischen Kanal mit Fehlerwahrscheinlichkeit $\varepsilon_n := \frac{1}{2}\,[1 - (1 - 2\,\varepsilon)^n]$ entsprechen und, dass deshalb gilt $\lim\limits_{n} I(X_0, X_n) = 0$.

$$X_0 \to [\text{BSC}_1] \to X_1 \to \ldots \to X_{n-1} \to [\text{BSC}_n] \to X_n$$

5. Zu einer Quelle W, die gleichverteilt eine von m Nachrichten erzeugt, welche durch eine gegebene Codierung f in m verschiedene Codeworte $f(i) \in A^n$ abgebildet werden, suche man jene Decodierung φ, die die Fehlerwahrscheinlichkeit $P_e := P(W \neq \varphi(\mathbf{Y}_1^n))$ minimiert.
Hinweis: Betrachten Sie die Decodierung $\hat{\varphi}$, für die gilt $\hat{\varphi}(\mathbf{y}_1^n) = i$, wenn $P(\mathbf{Y}_1^n = \mathbf{y}_1^n|\mathbf{X}_1^n = f(i)) = \max\limits_{1 \leq j \leq m} P(\mathbf{Y}_1^n = \mathbf{y}_1^n|\mathbf{X}_1^n = f(j))$.