1. Informationstheorie SS18

1. Bestimmen Sie für $m = 1, 2, 3, 4$ explizite Ausdrücke für $H^*(P)$ (Nehmen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeiten absteigend geordnet sind).

2. Zeigen Sie, dass $H^*(P) = H(P)$ genau dann gilt, wenn alle p_i von der Form 2^{-k} sind. Bestimmen sie alle solchen Verteilungen für $m = 1, 2, 3, 4$.

3. X und Y haben die gemeinsame Verteilung

	Y			
X	1	2	3	4
1	1/4	0	1/8	1/8
2	0	1/8	1/8	0
3	0	1/16	0	1/16
4	0	1/16	0	1/16

   Bestimmen Sie $H(X), H(Y), H(X, Y), H(X|Y), H(Y|X), I(X, Y)$.

4. Gegeben Sei die Verteilung

$$P = (0.1, 0.4, 0.05, 0.2, 0.25)$$

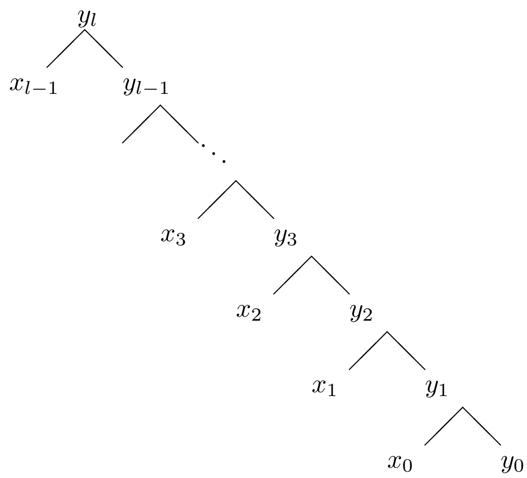
   Bestimmen sie die mittlere Unbestimmtheit und die Entropie.

5. $(X_1, \dots, X_4)$ seien unabhängig mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = 0.9$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 0.1$. Bestimmen Sie $H^*(X_1, \dots X_n)$ für $n = 1, \dots, 4$ und vergleichen Sie mit der Entropie.

6. (f_n) seien die Fibonaccizahlen ($f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$).
   Zeigen Sie für $i \geq 1$

$$f_i \geq \tau^{i-2},$$

   wobei $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die positive Lösung von $\tau^2 = \tau + 1$ ist.
   In einem Huffmanbaum betrachten wir einen Pfad der Länge l:



x_i und y_i repräsentieren die Wahrscheinlichkeiten der Knoten.

Zeigen Sie, dass $x_0 \geq 0$, $y_i = x_{i-1} + y_{i-1}$ und $x_i \geq y_{i-1}$ gilt und dass

$$y_i \geq f_{i+1}\, y_0.$$

Folgern Sie daraus

$$l \leq \log_\tau(\frac{1}{y_0}) + 1 \leq 1.5 \log_2(\frac{1}{y_0}) + 1.$$

7. In einer Urne befinden sich 5 Kugel mit Nummern 1 bis 5. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. X sei die kleinere der beiden gezogenen Zahlen, Y die größere. Bestimmen Sie $I(X,Y)$.