5. Übung Informationstheorie SS18

1. Typ/empirische Verteilung: $(x_1, \ldots, x_n)$ sei eine Folge aus $\{1, \ldots, m\}^n$. Der Typ dieser Folge ist der Vektor

$$H = H(x_1, \ldots, x_n) = (H_1, \ldots, H_m)$$

der Häufigkeiten
$$H_j = |\{i \leq n : x_i = j\}|.$$
$$h = h(X_1, \ldots, X_n) = H/n = (H_1/n, \ldots, H_m/n)$$
bezeichnen wir als die empirische Verteilung.

$$\mathcal{Q}_{mn} = \{h(x) : x \in \{1, \ldots, m\}^n\}$$

sei die Menge aller empirischen Verteilungen. $N_{mn} = |\mathcal{Q}_{mn}|$ sei die Anzahl der unterschiedlichen Typen in $\{1, \ldots, m\}^n$. Zeigen Sie $N_{mn} \leq n^m$.

2. $(X_1, \ldots, X_n)$ sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Verteilung P. Zeigen Sie für $Q \in \mathcal{Q}_{mn}$

$$\log_2(\mathbb{P}(h(X_1, \ldots, X_n) = Q)) \sim -nD(Q, P)$$

(in dem Sinn, dass

$$\max_{Q \in \mathcal{Q}_{mn}} |\frac{1}{n} \log_2(\mathbb{P}(h(X_1, \ldots, X_n) = Q)) + D(Q, P)| \to 0$$

für $n \to \infty$ — schätzen Sie in der Multinomialverteilung von H die Fakultäten durch die Stirling-Formel ab; damit und mit dem vorigen Beispiel lässt sich das "Prinzip der großen Abweichungen" zeigen: Für eine Menge A von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\{1, \ldots, m\}$ setzen wir

$$I(A) = \inf\{D(Q, P) : Q \in A\}.$$

Falls A abgeschlossen ist, dann gilt

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log_2(\mathbb{P}(h(X_1, \ldots, X_n) \in A)) \leq -I(A),$$

und
$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log_2(\mathbb{P}(h(X_1, \ldots, X_n) \in A)) \geq -I(A),$$
wenn A offen ist).

3. $X_1, \ldots$ sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = 0.9$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 0.1$. Bestimmen Sie optimale binäre Blockcodes für $(X_1, \ldots, X_{10})$ (also $(10, 2, l, 2)$-Codes) mit $l = 7, 8, 9$ und ihre Fehlerwahrscheinlichkeiten.

4. Der gestörte (binäre) Kanal hat die Kanalmatrix

$$C = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass dieser Kanal Kapazität 0 hat.

5. Der symmetrische (binäre) Kanal hat die Kanalmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass dieser Kanal Kapazität $1 - H(p, 1-p)$ hat.