6. Übung Informationstheorie SS18

1. Bei einem Spiel kann auf die möglichen Ausgänge $1, \ldots, m$ gesetzt werden, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_m$ gezogen werden. Wenn i gezogen wird, werden die Einsätze auf i m-fach zurückgezahlt, alle anderen verfallen.

   Eine Spielerin setzt von ihrem Anfangskapital K_0 Anteil q_i auf Ausgang i (also $K_0 q_1$ auf 1 etc., es gilt natürlich $q_i \geq 0$ und $\sum_i q_i = 1$). Nach jeder Runde setzt sie den Gewinn als Kapital in der nächsten Runde ein. Zeigen Sie, dass das Kapital nach der n-ten Runde

   $$K_n = K_0 m^n \prod_{i=1}^{n} q_{X_i}$$

   ist, und bestimmen Sie

   $$c = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log_2(K_n).$$

   Für welche Wahl von $q_1, \ldots, q_m$ wird c maximal und was ist dieser optimale Wert?

2. Bestimmen Sie die Kapazität des Kanals mit der Kanalmatrix

   $$C = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

   (die Verteilung von X sei $P = (p_1, p_2, p_3)$. Überlegen Sie zuerst, dass $P' = (p_1 + p_3/2, p_2 + p_3/2, 0)$ dieselbe Verteilung für Y liefert, und dass deshalb in der optimalen Verteilung $p_3 = 0$ sein muss).

3. Bestimmen Sie die Kapazität des Kanals mit der Kanalmatrix

   $$C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

   (Hier funktioniert, mit der in der Vorlesung die Kapazität des binären Kanals bestimmt wurde: wenn $y = (y_1, y_2, y_3)$ die Verteilung von Y ist, dann ergibt sich die Verteilung von X als $C^{-1}y$. Das führt zu der Aufgabe,

   $$-\sum_i y_i \log_2(y_i) - \sum_i y_i z_i$$

   unter der Nebenbedingung $\sum_i y_i = 1$ zu maximieren, wobei $z = C^{-1}h$ und h der Vektor mit den Entropien der einzelnen Zeilen von C ist).