2. Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie

1. l sei ein nichtnegatives additives und positiv homogenes Funktional auf dem Raum
$$C_b^+(X) = \{f \in C_b(X) : f \geq 0\}$$
Zeigen Sie, dass durch $l(f-g) = l(f) - f(g)$ ein positives lineares Funktional auf ganz C_b definiert wird.

2. μ sei ein linksinvariantes Borelmaß auf dem lokalkompakten Raum X und γ seine Modularfunktion. Zeigen Sie
$$\int f(xa)d\mu(x) = \gamma(a^{-1}) \int f(x)d\mu(x).$$

3. Zeigen Sie, dass γ stetig ist und die Gleichung
$$\gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b)$$
erfüllt.

4. Zeigen sie dass durch
$$\nu(A) = \int_A \gamma(x^{-1})d\mu(x)$$
ein rechtsinvariantes Maß definiert wird.

5. Bestimmen Sie die Modularfunktion zu Beispiel 2 der ersten Übung.

6. Zeigen Sie, dass jedes positive lineare Funktional auf $C_b(X)$ stetig ist, und dass ein positives lineares Funktional auf $C_c(X)$ genau dann stetig ist, wenn dass zugehörige Radonmaß endlich ist.

7. X sei kompakt. Zeigen Sie, dass ein stetiges lineares Funktional l auf $C(X)$ genau dann positiv ist, wenn $l(1) = \|l\|$ gilt.