7. Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{S}$ in Strassens Gesetz kompakt ist (in $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$); das ist ein Fall für den Satz von Arzela-Ascoli).

2. Es sei
$$B_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2T \log\log T}}(W(tT) - tW(T)).$$
Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte dieser Familie durch
$$\{f \in \mathcal{S} : f(1) = 0\}$$
gegeben ist.

3. Formulieren Sie ein Analogon zu Strassens Gesetz für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess.

4. Bestimmen Sie
$$\limsup \frac{W(t) + W(t/2)}{\sqrt{2t \log\log t}}.$$

5. Bestimmen Sie
$$\limsup \frac{\int_0^t W(s)ds}{\sqrt{2t^3 \log\log t}}.$$

6. Bestimmen Sie
$$\limsup \int_0^1 B_t(s)ds.$$
(Zur Erinnerung: die Variationsrechnung besagt, dass zur Maximierung von $\int_a^b g(x, f(x), f'(x))dx$ mit gegebenen Werten für $f(a) = A$ und und $f(b) = B$ die Differentialgleichung
$$\frac{\partial g}{\partial f} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial g}{\partial f'}) = 0$$
zu lösen ist. Wenn $f(b)$ nicht gegeben ist, wird die Randbedingung $f(b) = B$ durch $\frac{\partial g}{\partial f'}(b) = 0$ ersetzt. Die Nebenbdingung wird wie üblich durch Lagrange-Multiplikatoren eingebaut).