10. Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Zeigen Sie, dass jeder Banachraum von Typ 1 ist.

2. ξ und η seien unabhängige banachwertige Zufallsvariable, und η sei symmetrisch (d.h. $-\eta \overset{\vartheta}{=} \eta$). Zeigen Sie für $c \geq 0$

$$\mathbb{P}(\|\xi\| \geq c) \leq 2(\|\xi + \eta\| \geq c).$$

(Hinweis: $2\|\xi\| \leq \|\xi + \eta\| + \|\xi - \eta\|$).

3. Die Ungleichung von Lévy: $\xi_1, \ldots, \xi_n$ seien unabhängig und symmetrisch. Dann gilt (mit $S_i = \xi_1 + \ldots + \xi_i$) für $c \geq 0$

$$\mathbb{P}(\max_{i \leq n} \|S_i\| \geq c) \leq 2\mathbb{P}(\|S_n\| \geq c).$$

4. Die Ungleichung von Hoffmann-Jorgensen: $\xi_1 \ldots \xi_n$ seien unabhängig und symmetrisch und $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Dann gilt für $a, b \geq 0$

$$\mathbb{P}(\|S_n\| \geq 2a + b) \leq \mathbb{P}(\max_{i \leq n} \|\xi_i\| \geq b) + 4(\mathbb{P}(\|S_n| \geq a))^2.$$

(Betrachten Sie die Stoppzeiten $\tau = \inf\{i : \|S_i\| \geq a\}$ und $\tau_1 = \inf\{i \geq \tau : \|S_i - S_\tau\| \geq a\}$)

5. (ξ_n) sei eine Folge von unabhängigen symmetrischen Zufallsvariablen im Banachraum X von Typ $p \in [1, 2]$. Zeigen Sie, dass aus

$$\sum_n n^{-p} \mathbb{E}(\|\xi_n\|^p) < \infty$$

die Gültigkeit des starken Gesetzes der großen Zahlen folgt. (Betrachten Sie $\eta_n = \epsilon_n \xi_n$ mit einer Rademacherfolge (ϵ_n), die von (ξ_n) unabhängig ist).

6. Betrachten Sie den Wienerprozess als Zufallsvariable in $X = C[0, 1]$. Bekanntlich ist X^* die Menge der endlichen signierten Maße ν auf $([0, 1], \mathfrak{B})$. Zeigen Sie

$$r(\nu_1, \nu_2) = \int_0^1 \nu_1([t, 1])\nu_2([t, 1])dt$$

und

$$R(\nu)(t) = \int_0^t \nu([s, 1])ds.$$

7. Fortsetzung: der Hilbertraum H_R ist die Menge aller absolutstetigen Funktionen f mit quadratintegrierbarer Ableitung und $f(0) = 0$, und seine Einheitskugel ist die Menge $\mathcal{S}$ aus dem Gesetz von Strassen.