Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein WS 2015

ÜBUNGSBLATT 1

1) Für die Zufallsvariablen X, Y mit der Dichte $f(x,y) := \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,x]}(y)$ berechne man die bedingten Dichten $f_{X|Y}, f_{Y|X}$ und $\mathbb{E}(X|Y), \mathbb{E}(Y|X)$.

2) Für die Sub-σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und die Zufallsvariable X gilt $\mathbb{E}[|X|\ |\mathfrak{A}] < \infty$ f.s. genau dann, wenn es eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathfrak{A}$ gibt mit $\sum_i \mathbf{P}(A_i) = 1$ und für $i \geq 1$

$$\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{A_i}] \ < \ \infty \ .$$

3) Die stochastischen Größen X, Y, Z seien integrierbar. Gilt dann

$$\mathbb{E}[X|Y,Z] \ = \ \mathbb{E}[X|Z] \ ,$$

falls X und Y unabhängig sind?

4) Die Stochastischen Größen X, Y seien quadratisch integrierbar auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ mit der Sub-σ-Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$. Man zeige:

a) $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}\mathbb{E}(X|\mathfrak{A}) + \mathbb{E}[X - E(X|\mathfrak{A})]^2 \ \Rightarrow \ \mathrm{Var}\mathbb{E}(X|\mathfrak{A}) \leq \mathrm{Var}X$.

b) Aus $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}Y^2$ und $\mathbb{E}(Y|\mathfrak{A}) = X$ $\mathbf{P}$-fs. folgt $X = Y$ $\mathbf{P}$-fs.

5) Unter den Annahmen des letzten Beispiels gilt auch

$$\mathbb{E}(X|Y) = Y \ \ \mathbf{P}\text{-f.s.} \ \wedge \ \mathbb{E}(Y|X) = X \ \ \mathbf{P}\text{-f.s.} \quad \Rightarrow \quad X = Y \ \ \mathbf{P}\text{-f.s.}\,.$$

6) Man zeige die bedingte *Markov-Ungleichung*: Für $\eta : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton wachsend und eine Stochastische Größe X auf $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ und eine sub-σ-Algebra $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$ gilt

$$\mathbf{P}[|X| > \epsilon|\mathfrak{A}] \ \leq \frac{\mathbb{E}[\eta(|X|)|\mathfrak{A}]}{\eta(\epsilon)} \ .$$

7) Man zeige die bedingte *Hölder-Ungleichung*: Wenn $X \in L_p$ und $Y \in L_q$ mit $1 < p < \infty$ und konjugiertem $q = \frac{p}{p-1}$ auf $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ mit der Sub-σ-Algebra $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$, dann gilt

$$\mathbb{E}[|XY|\ |\mathfrak{A}] \ \leq \ (\mathbb{E}[|X|^p|\mathfrak{A}])^{\frac{1}{p}} \ (\mathbb{E}[|Y|^q|\mathfrak{A}])^{\frac{1}{q}} \ .$$