Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein WS 2015

ÜBUNGSBLATT 11

70) Für den gewöhnlichen Erneuerungsprozess N_t bestimme man die asymptotische Verteilung und Erwartung (für $t \to \infty$) von $A(t) := t - T_{N_t}$ (Einsatzdauer) und $B(t) := T_{N_t+1} - t$ (Restlebensdauer), wenn die (Komponentenlebensdauer) Y_i

a) Exponential-verteilt, $Y_i \sim Ex_\lambda$, bzw.

b) Pareto-verteilt, $Y_i \sim Pa_{2,1}$, mit $F(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$ für $t > 1$ ist.

Man zeige und interpretiere, dass $\mathbb{E}(A(t) + B(t))$ über der mittleren Komponentenlebensdauer liegt. (*Bus-Paradoxon.*)

71) Man betrachte eine unabhängig, identisch verteilte Folge $Z_i = 1 + R_i$ von Zinsfaktoren zum Zinssatz R_i unter Paretoverteilung $Z_i \sim Par_{\tau,1}$ mit Dichte

$$f(x) \;=\; \tau x^{-\tau-1}\, \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)$$

mit $\tau > 0$. Der Zinsfaktor nach n Perioden sei

$$\Psi_n \;=\; \prod_{i=1}^{n} Z_i.$$

Welchen Grenzwert erreicht der Durchschnittszinssatz $\bar{R}_n$ für $n \to \infty$? (Der Durchschnittszinssatz errechnet sich aus dem geometrischen Mittel der Zinsfaktoren.)

72) Für das Zinsmodell aus Beispiel 71) soll das asymptotische Streuverhalten erklärt werden:

a) Man finde reellwertige Folgen a_n und b_n, sodass $\Psi_n^{a_n}.b_n$ eine (nicht triviale) Grenzverteilung (welche ?) besitzt.

b) Man finde reellwertige Folgen c_n und d_n, sodass die Häufungspunkte der Folge $\Psi_n^{c_n}.d_n$ fast sicher ein Intervall bilden.

73) Die stochastische Folge N_n, $N_0 \equiv 1$ mit Werten in $\mathbb{N}$ bildet einen einfachen Verzweigungsprozess, wenn

$$N_{n+1} \;:=\; \sum_{k=1}^{N_n} \xi_k$$

wobei $\xi_k \in \mathbb{N}$ unabhängig (voneinander und von N_n) und identische Realisierungen einer Zufallsgrößen ξ mit Mittel $\mathbb{E}\xi = m$ und Varianz $\sigma^2 < \infty$ sind. Man zeige, dass

$$\tilde{N}_n \;:=\; \frac{N_n}{m^n}$$

ein Martingal ist und bestimme $\mathbb{E}N_n$ und $\mathrm{Var}(N_n)$.

Hinweis: Die Basis für die Berechnung der Varianz ist die Rekursion

$$\mathrm{V}ar(N_{n+1}) \;=\; \sigma^2 \mathbb{E}N_n \;+\; m^2 \mathrm{V}ar(N_n) \quad .$$

Bemerkung: Man kann N_n als den Umfang der n-ten Generation interpretieren. Dann ist ξ_k die Anzahl der 'Nachkommen' des k-ten Individuums aus dieser Generation.

74) Man folgere das starke Gesetz der großen Zahlen direkt aus dem Satz vom iterierten Logarithmus.

75) Für $\omega \in [0,1)$ von $([0,1), \mathfrak{B}|_{[0,1)}, \lambda|_{[0,1)})$ sei $(0, \omega_1, \omega_2, \ldots); \omega_i \in \{0,1\}$ die dyadische Darstellung. Man begründe, dass λ- fast alle Zahlen ω aus [0,1] unendlich viele 0 in der dyadischen Darstellung besitzen und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \;=\; \frac{1}{2}$$

erfüllen.

Bemerkung: Eine Zahl ω mit dieser Eigenschaft heißt normale Zahl.

76) Die Folge X_i bilde eine iid. Folge und sei standardisiert, $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathrm{Var}(X_i) = 1$. Man betrachte

$$Z_n \;:=\; \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{2n \log\log n}} \;.$$

Konvergiert Z_n fast sicher oder ist Z_n L^2-konvergent ?