Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein WS 2015

ÜBUNGSBLATT 3

14) Unter den Annahmen des letzten Beispiels (Beispiel 13) und der zusätzlichen Bedingung

$$\sup_k \mathbb{E}(X_k - X_{k-1})^2 < \infty$$

gilt für beliebiges $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\frac{X_n}{n} > \epsilon) \;=\; 0 \qquad .$$

15) Man suche eine Funktionenfolge (f_n) auf einem endlichen Maßraum $(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,\mu)$, die gleichmäßig (oder gleichgradig) integrierbar ist, zu der es aber keine integrierbare Funktion g mit $g \geq |f_n| \quad \mu$-fü $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gibt.

16) Sind $\mathcal{F}\,,\mathcal{G}$ Familien mesbarer Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,\mu)$, so zeige man:

a) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}_1 \;\wedge\; |\mathcal{F}| < \infty \;\Rightarrow\; \mathcal{F}$ ist gleichmäßig integrierbar,

b) $\mathcal{G}$ ist gleichmäßig integrierbar, wenn $\mathcal{F}$ gleichmäßig integrierbar ist und $\forall\, g \in \mathcal{G} \quad \exists\, f \in \mathcal{F}:\; |g| \leq |f| \quad \mu$-fü,

17) Man zeige, dass für Familien gleichgradig integrierbarer Familien mesbarer Funktionen $\mathcal{F}\,,\mathcal{G}$ auch $\{f \vee g\,, f \pm g:\; f \in \mathcal{F}\,, g \in \mathcal{G}\}$ gleichmäßig integrierbar ist.

18) Die monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ erfüllt $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \infty$. Wenn eine Folge von Zufallsvariablen X_n

$$\sup_n \mathbb{E}\; g(|X_n|) \;<\; \infty$$

erfüllt, dann ist X_n gleichgradig integrierbar.

19) Man beweise, dass $(\,X_n \vee Y_n\,,\mathfrak{S}_n)$ ein Submartingal ist, wenn $(\,X_n\,,\mathfrak{S}_n)$ und $(\,Y_n\,,\mathfrak{S}_n)$ Submartingale sind.

20) Beweisen Sie Kolmogoroffs 0-1-Gesetz, dass bei einer Folge unabhängiger Zufallsvariabler X_n für jedes terminale A gilt $P(A) = 0 \vee P(A) = 1$, mit Hilfe von Resultaten der Martingaltheorie.

Hinweis: Man betrachte $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathfrak{S}(X_1,\ldots,X_n)\,)$.