Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein WS 2015

ÜBUNGSBLATT 4

21) Sind die $Z_i \sim B_{\frac{1}{2}}$ unabhängig, so kann man $X_i := 2^{i-1}\,(2\,Z_i - 1)$ als Nettogewinn des i-ten Spiels interpretieren, wenn man bei diesem Spiel € 2^{i-1} einsetzt, also in jedem Schritt seinen Einsatz verdoppelt.

a) Zeigen Sie $S_n := \sum_{i=0}^{n} X_i$ und $\mathfrak{A}_n := \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)$ bilden ein Martingal.

b) Beweisen Sie $T := \min\{i : \; X_i > 0\}$ ist eine endliche Stoppzeit.

c) Man berechne S_T und $\mathbb{E}S_T$.

22) Unter den Voraussetzungen des letzten Beispiels interpretiere man $S_{T\wedge n}$ und berechne $S_{T\wedge n}$ sowie $\mathbb{E}S_{T\wedge n}$. Man berechne $\liminf_n \int_{[T>n]} |S_n| \; dP$, $\mathbb{E}\,|S_n|$ und $\sup_n \mathbb{E}\,|S_n|$.

23) Die stochastische Folge X_n sei ein Submartingal. Für $t > 0$ gilt

$$\mathbf{P}[\, \max_{k\le n} X_k > t \,] \;\le\; \frac{\mathbb{E}|X_n|}{t}.$$

Hinweis: Für die Stoppzeit $T := \inf\{k \ge 0 | X_k > t\}$ wende man die die Martingalsätze an.

24) Die Folge X_i sei eine iid. Folge von $X \in \mathcal{L}_1$. Mit $S_n = \sum_i^n X_i$ und der charakteristischen Funktion $\varphi_X(t)$ von X sei

$$Z_n \;:=\; \frac{\mathrm{e}^{itS_n}}{\varphi_X(t)^n}$$

für festes t. Man begründe, dass Z_n ein (komplexwertiges) Martingal ist.

25) Man bestimme die charakteristische Funktion φ der Standardnormalverteilung dadurch, dass für φ die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} \;=\; -t\;\varphi$$

gezeigt wird.

26) Zu der charakteristischen Funktion φ_X der Zufallsgröße X sind auch der Realteil $\mathfrak{R}(\varphi_X)$ und $|\varphi_X|^2$ charakteristische Funktionen. Man überlege sich die entsprechenden Zufallsgrößen.

27) Man bestimme die zur charakteristischen Funktion $\varphi(t) := e^{-|t|}$ gehörige Dichte.