Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein WS 2015

ÜBUNGSBLATT 7

42) Es soll eine unabhängige Folge X_i mit $\mathbb{E}|X_i| = \infty$, die aber

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \ldots X_n) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

erfüllt, gefunden werden.

43) Die Geometrische Verteilung mit Punktwahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}[X = k] = (1-p)^k p \qquad k \geq 0$$

ist unbegrenzt teilbar. Das soll durch Angabe des *Levy-Maßes* in der *Levy-Khinchin Formel* belegt werden.

Hinweis: Für $\log \varphi(t)$ (Momenterzeugende Funktion) gebe man eine Taylor-Entwicklung an, die als Integral mit einem diskreten Maß angesehen werden kann.

In den folgenden Beispielen soll die Teilbarkeit direkt also ohne Argumente über beschränkte Träger untersucht werden.

44) Man bestimme die charakteristische Funktion der *Dreiecksverteilung* mit Dichte

$$f(x) = (1 - |x|)\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

Ist dieses Wahrscheinlichkeitsmaß unbegrenzt teilbar?

45) Welche der Verteilungen Exponentialverteilng Ex_λ oder Gleichverteilung $U_{[a,b]}$ sind unbegrenzt teilbar?

46) Die Binomialverteilung $B_{n,p}$ ist nicht unbegrenzt teilbar. Man unterscheide dabei die Fälle $p = 1/2$ und $p \neq 1/2$.

Hinweis: Für den zweiten Fall stelle man $B_{n,p}$ als Faltung (zweier) Maße dar, die aber nicht gleich sein können.

47) Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ sei unbegrenzt teilbar. Das Maß $\mathbf{P}$ ist genau dann symmetrisch um 0, wenn das Levy Maß ν symmetrisch um 0 ist und daher für die charakteristische Funktion φ von $\mathbf{P}$

$$\log \varphi(t) = -\frac{\sigma^2 t^2}{2} - 2\int [\cos(tx) - 1]\ \nu(dx)$$

gilt.

48) Die Verteilung von $X \geq 0$ entspreche einer *Compound Poisson* Verteilung. Dann ist das Levy Maß ν ein Maß auf $\mathbb{R}^+$ und die Laplace Transformierte ψ von X hat die Darstellung

$$\psi(t) = \exp(\int_{(0,\infty)} [e^{-tx} - 1]\ \nu(dx))$$