Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://mstoch.tuwien.ac.at/lv-guide VO: S. Källblad / K. Felsenstein WS 2017

ÜBUNGSBLATT 2

7) Der stochastische Vektor $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^k$ sei multivariat normalverteilt. $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ mit $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ und $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Für die Teilvektoren $X_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$ und $X_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$ mit $k_1 + k_2 = k$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$, bestimme man die Regressionsfunktion $\mathbb{E}[X_1|X_2]$.

Hinweis: Man bestimme zunächst die bedingte Erwartung für zentrierte Größen, also $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$.

8) Es seien die stochastischen Größen X, Y quadratisch integrierbar mit fallender Regressionsfunktion $h(.)$,

$$\mathbb{E}(X|Y) \;=\; h(Y) \;.$$

Dann sind X und Y negativ korreliert.

9) Es soll eine Folge stochastischer Größen X_n auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\ \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ sowie eine Sub-σ-Algebra $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ gefunden werden, sodass der Satz der *dominierten Konvergenz* zwar für die bedingten Erwartungen gilt, aber nicht in der unbedingten Version anwendbar ist.

10) Die Folge ξ_i bestehe aus unabhängigen und identisch Verteilten stochastischen Größen mit $\mathbb{E}\xi_i = \mu$. Die Filtration sei $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

a) Für die Partialsummen $S_0 = 0$ und $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ überlege man sich, dass

$$Y_n \;=\; S_n \;-\; n\mu$$

ein $\mathcal{F}_n$ Martingal ist. Man kann also o.B.d.A. $\mu = 0$ setzen.

b) Wenn zusätzlich die Momenterzeugende Funktion $M(t) \;=\; \mathbb{E}e^{t\xi_1}$ in einer Umgebung um 0 existiert, ist auch für $t \in \mathbb{R}$

$$Z_n \;=\; \exp(tS_n)\; M(t)^{-n}$$

ein $\mathcal{F}_n$ Martingal.

11) Unter der zusätzlichen Annahme, dass $M(t)$ zweifach differenzierbar ist, soll gezeigt werden, dass dann auch

$$\frac{d^2}{dt^2} Z_n\big|_{t=0}$$

aus dem letzten Beispiel ein $\mathcal{F}_n$ Martingal ist.

Hinweis: Momente ergeben sich bekanntlich aus den Ableitungen von M .

12) Die Familien $(X_t, \mathfrak{A}_t)$ und $(Y_t, \mathfrak{C}_t)$ seien Martingale. Man begründe, dass $Z_t := X_t + Y_t$ ein an $\mathfrak{A}_t$ adaptiertes Martingal ist, wenn die Filtrationen $\mathfrak{A}_t = \mathfrak{C}_t$ gleich sind. Es soll ein Beispiel gefunden werden, dass Z_t kein Martingal (adaptiert an die kanonische Filtration) ist, wenn $\mathfrak{A}_t$ und $\mathfrak{C}_t$ verschieden sind.