Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://mstoch.tuwien.ac.at/lv-guide VO: S. Källblad / K. Felsenstein WS 2017

ÜBUNGSBLATT 4

19) Die Folge Y_i bestehe aus unabhängig und identische verteilten Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f_0 bezüglich des Maßes μ auf $\mathbb{R}$. f_1 sei eine weitere Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich μ. Dann bilden die *Likelihood-Quotienten*

$$L_n \;:=\; \frac{\prod_{i=1}^n f_1(Y_i)}{\prod_{i=1}^n f_0(Y_i)}$$

ein Martingal adaptiert an die kanonische Filtration von Y_i.

20) Beweisen Sie Kolmogoroffs 0-1-Gesetz, dass bei einer Folge unabhängiger Zufallsvariabler X_n für jedes terminale A $\mathbf{P}(A) = 0$ oder $\mathbf{P}(A) = 1$ gilt, mit Hilfe von Resultaten der Martingaltheorie.
HINWEIS: Man betrachte $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\sigma(X_1, \ldots, X_n))$.

21) Sind die $Z_i \sim B_{\frac{1}{2}}$ unabhängig, so kann man $X_i := 2^{i-1}\,(2\,Z_i - 1)$ als Nettogewinn des i-ten Spiels interpretieren, wenn man bei diesem Spiel € 2^{i-1} einsetzt, also in jedem Schritt seinen Einsatz verdoppelt.

a) Zeigen Sie $S_n := \sum\limits_{i=0}^{n} X_i$ und $\mathfrak{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ bilden ein Martingal.

b) Beweisen Sie $T := \min\{i : \; X_i > 0\}$ ist eine endliche Stoppzeit.

c) Man berechne S_T und $\mathbb{E}S_T$.

22) Unter den Voraussetzungen des letzten Beispiels interpretiere man $S_{T\wedge n}$ und berechne $S_{T\wedge n}$ sowie $\mathbb{E}S_{T\wedge n}$. Man berechne $\liminf\limits_n \int_{[T>n]} |S_n| \; dP$, $\mathbb{E}\,|S_n|$ und $\sup\limits_n \mathbb{E}\,|S_n|$.

23) Für den *Galton-Walton-Prozess* Z_n mit Erwartung m der Nachkommenverteilung $\mathbb{E}X_{k,i} = m$ zeige man, dass

$$W_n \;=\; \frac{Z_n}{m^n}$$

(bezüglich der natürlichen Filtration der $X_{k,i}$) ein Martingal ist.

24) S_n sei ein *Random Walk* (d.h. : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, X_i unabhängig, identisch verteilt mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$) mit dem Sprungmaß (Verteilung der X_i)

$$\mathbf{P}[X = 1] = p_1, \quad \mathbf{P}[X = 2] = p_2, \quad \mathbf{P}[X = \infty] \;=\; 1 - p_1 - p_2, \quad (p_1, p_2 > 0).$$

Es sei $N := \min\{n > 0 | S_n = \infty\}$.

a) Sind N bzw. $N^* := N - 1$ Stoppzeiten?

b) Man zeige $\mathbf{P}[N < \infty] = 1$,

c) bestimme die gemeinsame Verteilung von (N^*, S_{N^*}),

d) und die Erwartung $\mathbb{E}S_{N^*}$.