Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://mstoch.tuwien.ac.at/lv-guide VO: S. Källblad / K. Felsenstein WS 2017

ÜBUNGSBLATT 5

25) Die stochastische Folge X_n sei ein Submartingal. Für $t > 0$ gilt

$$\mathbf{P}[\max_{k \leq n} X_k > t\,] \;\leq\; \frac{\mathbb{E}|X_n|}{t}.$$

HINWEIS: Für die Stoppzeit $T := \inf\{k \geq 0 | X_k > t\}$ wende man die die Martingalsätze an.

26) X sei eine nichtnegative, integrierbare Stochastische Größe mit $\mathbf{P}(X = 0) \;<\; 1$.

a) Man zeige die *Paley-Zygmund* Ungleichung

$$\mathbf{P}(X > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}\;.$$

b) Man verwende a) für untere Schranken für $\mathbf{P}(Z_n > 0)$, wenn Z_n ein Galton-Watson Verzweigungsprozess (ausnahmsweise) mit Startwert $Z_0 = k$.

27) Für den Galton-Watson Prozess Z_n mit Mittel $m = 1$ und Varianz σ^2 der Nachkommenverteilung σ^2 zeige man

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}(Z_n > 0) \;=\; \frac{2}{\sigma^2}$$

28) Z_n sei ein Galton-Watson Prozess mit Mittel m und Varianz σ^2 der Nachkommenverteilung und Startwert $Z_0 = 1$. Es soll die Varianz $Var(Z_n)$ bestimmt werden.

29) Für die asymmetrische Irrfahrt S_n mit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ für unabhängige identisch verteilte X_i

$$\mathbf{P}[X_i = 1] \;=\; 1 - \mathbf{P}[X_i = -1]$$

für $p \;\neq \frac{1}{2}$, $q = 1 - p$, mit $S_0 = 0$. Es sei $\tau := \min\{n | S_n \notin (-a, b)\}$ für $a, b \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass $\mathbb{E}\tau < \infty$ und dass

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \qquad \text{und} \qquad S_n \;-\; n(p-q)$$

Martingale sind.

30) Unter Verwendung der Martingaleigenschaften zeige man für die Irrfahrt aus dem letzten Beispiel

$$\mathbf{P}(S_\tau = b) \;=\; \frac{1 - (p/q)^a}{(q/p)^b - (p/q)^a}$$

und bestimme $\mathbb{E}\,\tau$.