# Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://mstoch.tuwien.ac.at/lv-guide VO: S. Källblad / K. Felsenstein WS 2017

## ÜBUNGSBLATT 6

**31)** Der *Zählprozess* $N_t$ hat identisch verteilte und unabhängige Zwischenankunftszeiten $T_i \geq 0$ mit Sprungzeiten $\tau_k = \sum_{i=1}^{k} T_i$ und $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[\tau_k \leq t]}$. Wenn $\mathbb{E}T_i \in (0, \infty)$, dann gilt fast sicher $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ und

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}T}.$$

**32)** Für $\lambda_i > 0, i = 1, \ldots, k$ und $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ seien stochastische Größen $Z_i$ mit Werten in $\mathbb{N}$ und $Z = \sum_{i=1}^{k} Z_i$ definiert. Man zeige, $(Z_1, \ldots, Z_k)$ ist genau dann unabhängig Poisson-verteilt, $Z_i \sim P_{\lambda_i}$, wenn $Z \sim P_\lambda$ Poisson-verteilt ist und $(Z_1, \ldots, Z_k)$ bedingt unter $Z = k$ Multinomial-verteilt $M_{k;p_1,\ldots,p_k}$ mit $p_i = \lambda_i/\lambda$ ist.

**33)** $T_i, i = 1, \ldots, k$ seien die Zwischenankunftszeiten eines Poissonprozess $N_t$ mit Rate $\lambda$ und $\tau_k$ die Zeit bis zum $k$-ten Ereignis. Man bestimme die Verteilung und den Erwartungswert sowohl der minimalen als auch der maximalen Zwischenankunftszeit, wenn $\tau_k = T$ .

**34)** Ein Compound Poissonprocess $X(t)$ ist über einen Poissonprozess $N_t, t > 0$ mit Rate $\lambda > 0$ und einer unabhängigen und identisch verteilten stochastischen Folge $Y_i$ durch

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

definiert. Man zeige, dass $X_t$ stationäre und unabhängige Zuwächse besitzt. Es soll für $X(t)$ Mittel $\mathbb{E}X_t$ und Varianz und die Momenterzeugende Funktion bestimmt werden, wenn auch $Y_i$ eine Varianz und eine wohldefinierte Momenterzeugende Funktion besitzt.

**35)** $N_t$ sei ein inhomogener Poissonprozess mit Intensität $\lambda(t)$ und $\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(s)\, ds$. Welche der folgenden Prozesse sind Martingale ?

**a)** $N_t - \Lambda(t)$ ,

**b)** $(N_t - \Lambda(t))^2 - \Lambda(t)$ ,

**c)** $\exp[sN_t - \Lambda(t)(\exp(s) - 1)]$ für $s \in \mathbb{R}$ .

**36)** Der Poissonsche Punktprozess $N(.)$ in $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^2, \lambda^2)$ hat Rate $\nu > 0$, somit gilt für die Anzahl der Ereignisse in $B \in \mathfrak{B}^2$

$$N(B) \sim P_\mu \qquad \text{mit } \mu = \nu.\, \lambda^2(B) .$$

Für einen festen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ sei $X$ der euklidische Abstand von $x$ zu dem nächstgelegenen Punkt(-Ereignis) von $N(.)$. Man bestimme die Verteilung und Erwartung von $X$.